Algunos métodos para determinar el meridiano astronómico

POR ROSAURO CASTRO

Profesor de Astronomía de la Universidad de Chile y Director del Observatorio Astronómico.

La determinación del meridiano astronómico por observaciones de estrellas es un trabajo frecuentemente realizado por los ingenieros de minas, topógrafos y geodestas, con el fin de fijar la dirección Norte-Sur en el plano del levantamiento hecho en el terreno.

Hay numerosos métodos que se pueden emplear y la elección de ellos depende, naturalmente, de varios factores, como ser: la pericia del observador, el instrumento y la exactitud que se desea.

Para dar una idea de conjunto voy a desarrollar algunos de los principales procedimientos más en uso con instrumentos portátiles.

En la figura (1) tenemos la esfera celeste y sobre ella el triángulo fundamental formado por el Polo Norte celeste, el zenit del observador y la estrella S.

Los elementos de ese triángulo son:

$$\text{Lados}\begin{cases} Z = \text{distancia zenital} \\ 90 - \delta = \text{distancia polar norte del astro} \\ 90 - \varphi = \text{colatitud del lugar} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H &= \text{ángulo horario, positivo al oeste del meridiano.} \\ 180 - A &= \text{suplemento del azimut} \\ 180 - p &= \text{suplemento del ángulo paraláctico.} \end{aligned}$$

El azimut astronómico se cuenta desde el Sur hacia el W-N-E. La latitud φ y la declinación δ son positivas en el hemisferio norte y negativas en el hemisferio sur.

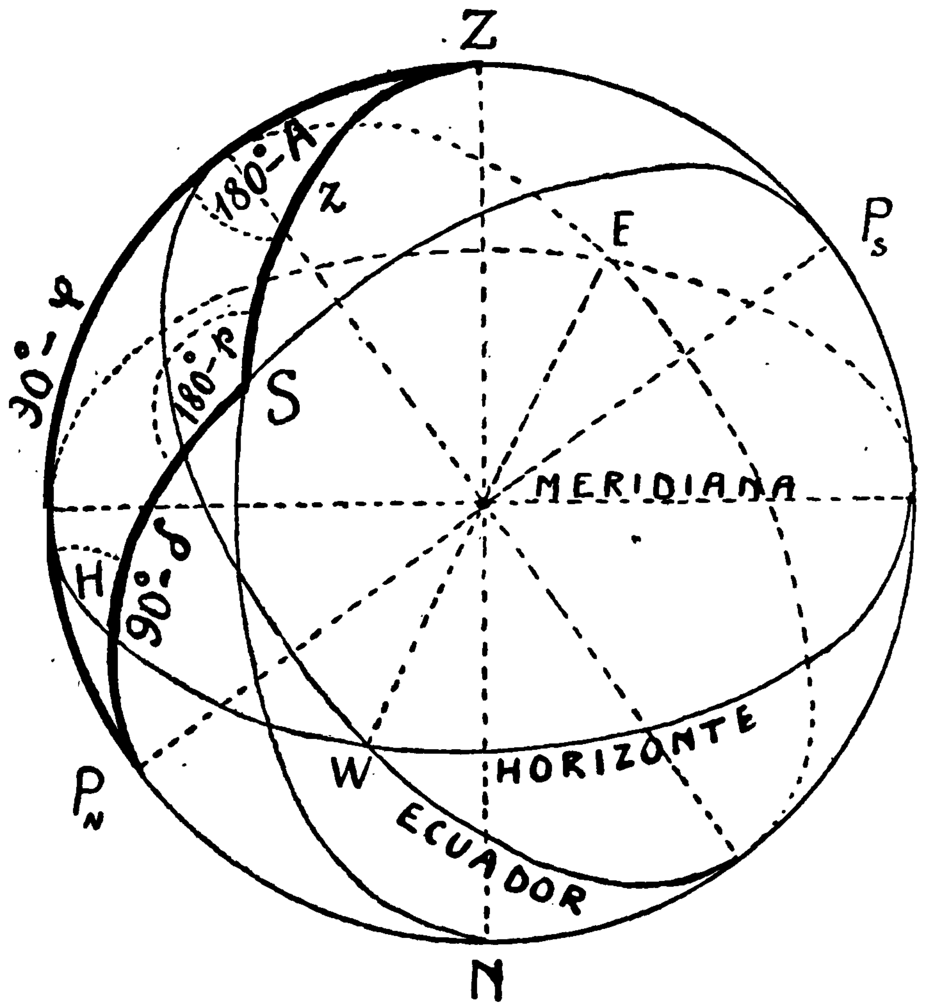

Fig. 1

La ascensión recta está relacionada con el ángulo horario H y el tiempo sideral θ por la fórmula (1).

$$H = \theta - \alpha \qquad (1)$$

Del triángulo esférico se deducen las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \cos Z &= \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H \\ \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} A &= \cos\delta \operatorname{sen} H \\ -\operatorname{sen} Z \cos A &= \operatorname{sen}\delta \cos\varphi - \cos\delta \operatorname{sen}\varphi \cos H \end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

Dividiendo estas dos últimas se obtiene:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} H}{\operatorname{sen}\varphi \cos H - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi} \qquad (2)$$

Por medio de la fórmula (2) se puede determinar el azimut de un astro cuando se conocen las coordenadas (α, δ) del astro, la latitud y la hora sideral θ. La lectura azimutal del astro menos el azimut dará la lectura del punto sur. Esto supone que la observación ha sido hecha con un teodolito cuya graduación azimutal crece cuando el azimut aumenta. Una observación hecha con instrumento universal, o sea un teodolito de primer orden, obligará a corregir las lecturas azimutales por los efectos de inclinación del eje de rotación del anteojo y también por colimación del hilo vertical central del micrómetro. Sea «i» la inclinación, con respecto a la horizontal, del muñón izquierdo, y «c» la colimación cuando el hilo vertical de observación queda a la diestra del hilo ficticio ideal que pasa verticalmente por el centro geométrico del campo óptico. Se tienen las correcciones que hay que hacer a las lecturas horizontales por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} l_{(i)} &= i \,.\, cotg\, Z \\ l_{(c)} &= c \,.\, cosec\, Z \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Esta determinación del azimut implica el conocimiento exacto de la hora sideral, lo que se puede obtener por observaciones de alturas de estrellas conocidas y aplicando la fórmula

$$cos\, H = \frac{sen\, Z - sen\, \varphi\, sen\, \delta}{cos\, \varphi \,.\, cos\, \delta} \qquad (4)$$

Esta observación de altura se hace en el instante en que la estrella llega al hilo horizontal central del micrómetro. Como seguramente el hilo horizontal de observaciones no coincide con el hilo horizontal ficticio que pasa por el centro geométrico del campo óptico, habrá que corregir las lecturas verticales por error de índice. Este error puede determinarse previamente observando con el hilo horizontal un objeto lejano, como una mancha de nieve, por ejemplo, en ambas posiciones del instrumento, y leyendo en ambos casos el círculo vertical. Lo mismo puede hacerse para determinar el error de colimación. Ambos errores, colimación y error de índice, se eliminan al combinar las observaciones de las estrellas de manera que haya igual número en ambas posiciones del instrumento.

El *método de las elongaciones máximas de las estrellas* circumpolares es el más corrientemente usado, por la exactitud que se obtiene de él. Hay que conocer la estrella que se va a observar y también la latitud geográfica. Para prevenir el fenómeno es necesario conocer aproximadamente la hora sideral.

En el instante de la máxima elongación el ángulo paraláctico es recto. Entonces se obtienen las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} sen\, A &= css\, \delta\, sec\, \varphi \\ cos\, Z &= sen\, \varphi\, cosec\, \delta \\ cos\, H &= tg\, \varphi\, cotg\, \delta \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

La primera de las fórmulas (5) sirve para determinar el azimut correspondiente a la lectura horizontal en el instante de la elongación máxima.

El *método de azimut y altura simultáneos* consiste en observar una estrella conocida en el instante en que pasa por la intersección de ambos hilos del micrómetro. Se leen los dos círculos y se repite la observación en la otra posición del instrumento. No se necesita la hora. El azimut se obtiene por la fórmula:

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos Z - \operatorname{sen}\delta}{\cos\varphi \operatorname{sen} Z} \tag{6}$$

En la práctica se necesita a veces conocer rápidamente la dirección Norte-Sur, aunque sea aproximadamente. Por esta causa es tan empleada la brújula, que da el norte magnético, cuando se conoce la declinación magnética del punto de observación. Pero también resulta que los datos que se obtienen a veces con la aguja magnética de la declinatoria son erróneos, por varias razones; principalmente por el influjo de masas ferruginosas subterráneas o a flor de tierra. De ahí viene la poca seguridad que existe en basar levantamientos de consideración en el meridiano magnético.

Por esta razón el autor de este trabajo se ha propuesto presentar el método rápido que se explicará a continuación con el fin de que sea ensayado y practicado por aquellos observadores que desean determinar el meridiano astronómico con una exactitud no mayor de un minuto de arco.

Es claro que si ya conoce, con su observación, un valor aproximado del meridiano, le será fácil al observador, por métodos más exactos, obtener mayor seguridad en su determinación del norte astronómico.

Considerando como variables las coordenadas horizontales Z, A, el ángulo horario H y el paraláctico también lo serán, puesto que suponemos que el observador está en punto determinado de la tierra y observa una estrella fija.

Usando la serie de Taylor se obtienen los desarrollos del ángulo horario y del azimut con respecto a la distancia zenital.

$$H' - H = \frac{\Delta Z''}{\cos\varphi \operatorname{sen} A} + \frac{1}{2}\frac{\cos A \cos p}{\operatorname{sen} H}\left(\frac{\Delta Z''}{\cos\varphi \operatorname{sen} A}\right)^2 \operatorname{sen} 1'' +$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{\cos^2 A + \cos^2 p - \cos A \operatorname{css} p \cos H}{\operatorname{sen}^2 H}\left(\frac{\Delta Z''}{\cos\varphi \operatorname{sen} A}\right)^3 \operatorname{sen}^2 1'' + \ldots\ldots$$

$$A' - A = -\frac{\Delta Z''}{tg\, p \operatorname{sen} Z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cot p \cot Z}{\operatorname{sen} Z} - \frac{\cot A}{\operatorname{sen}^2 Z \operatorname{sen}^2 p}\right)\Delta Z''^2 \operatorname{sen} 1'' +$$

$$+ \left(\frac{\cos Z \operatorname{sen} p}{tg\, A} - \frac{\cos p}{\operatorname{sen}^2 A} - 2\cot^2 A \cos p\right)\left(\frac{\Delta Z''}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} Z}\right)^3 \frac{\operatorname{sen}^2 1''}{6} -$$

$$- \cot p\,(1 + \cos^2 Z)\left(\frac{\Delta Z''}{\operatorname{sen} Z}\right)^3 \frac{\operatorname{sen}^2 1''}{6} + \ldots\ldots \tag{7}$$

La derivada

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{\cos\varphi \operatorname{sen} A}$$

difiere del cuociente $\Delta t/\Delta Z$ por cantidades que se pueden determinar por medio del desarrollo dado para el ángulo horario.

Pues bien, el método propuesto acepta que en una primera aproximación se puede poner

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Delta t_1}{\Delta Z_1} &= \frac{1}{\cos\varphi \operatorname{sen} A_1}\\[2ex] \frac{\Delta t_2}{\Delta Z_1} &= \frac{1}{\cos\varphi \operatorname{sen} A_2}\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Siendo Δt_1 y Δt_2 el tiempo empleado por dos estrellas diferentes para recorrer la diferencia ΔZ de distancias zenitales, la cual puede ser el intervalo entre dos hilos horizontales del teodolito o taquímetro dentro del campo del anteojo. La manera de obtener la diferencia de tiempo se haría por medio de un cronómetro que marque décimas o quintos de segundo y se procedería del siguiente modo: el observador mantendría el cronómetro listo para ponerlo en marcha con una mano y con la otra haría funcionar el tornillo tangencial para movimientos finos del círculo horizontal, de tal manera que la estrella en su movimiento a través del campo del anteojo pase por la intersección del hilo vertical central con uno de los hilos horizontales, que sería el primero de los que encontrará la estrella al avanzar. En este mismo instante la presión del dedo hará marchar la aguja del cronómetro de bolsillo. La estrella se aparta del hilo vertical y tiende a salir del campo; entonces el movimiento fino en azimut hace retroceder la estrella en el campo hasta obligarla a pasar por la intersección del hilo vertical con el hilo siguiente, instante en que se detiene el contador-cronómetro y no se mueve más el anteojo en azimut. Léense ahora, el tiempo y la graduación azimutal. Esta misma observación se repite con otra estrella.

Sea entonces

$$A_2 = A_1 + a_1$$

Se tiene

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\operatorname{sen} A_1 \cos a_1 + \cos A_1 \operatorname{sen} a_1}{\operatorname{sen} A_1}$$

De ahí:

$$\cot A_1 = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \operatorname{cosec} a_1 - \cot a_1 \qquad (9)$$

(9) es la fórmula en que se basa el método para determinar el azimut de una de las estrellas. Como vemos, no es necesario conocer las estrellas. El observador puede hacer la puntería a cualquier estrella brillante cuyas coordenadas ecuatoriales

no conoce. El resultado no será rigurosamente exacto, debido en primer lugar a que los incrementos no son infinitamente pequeños y también al efecto de la refracción diferencial, la cual hace que el intervalo constante del teodolito sea recorrido por las estrellas en un tiempo un poco distinto del verdadero, debido a que la refracción levanta más la estrella cuando pasa por el hilo inferior que no cuando lo hace por el superior.

Para ver la eficacia del sistema propuesto van más adelante aplicaciones de la fórmula hallada, basándose en posiciones de estrellas calculadas previamente. En estos cómputos numéricos no entran más que los resultados teóricos. Faltan por consiguiente los efectos de refracción diferencial y otros, los cuales se dan por descontados en vista de que se procura hallar solamente una solución aproximada del problema para determinar el meridiano astronómico.

En la tabla se ha hecho

$$d(n-m) = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

N.°	1	2	3	4	5	6
Estrella	α Gemelos	α Can May.	α Argo	α Can Men.	α Pez Austr.	α Eridano
Nombre.........	Castor	Sirio	Canopo	Proción	Fomalhaut	Achernar
Magnitud.......	+2,0	—1,6	—0.9	+0.5	+1.3	+0.6
	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s	h m s
1940 α	7 30 46,7	6 42 30,6	6 22 37,1	7 36 9,7	22 54 20,4	1 35 28,9
1940 δ	+32°1′18″	—16°37′57″	—52°39′44″	+5°22′49″	—29°56′26″	—57°32′28″
H	—60°	—75°	—75°	—60°	+60°	—50°52′15″
log sen H	9.937531n	9.98494n	9.98494n	9.93753n	9.93753	9.88970n
log cos H	9.698970	9.41300	9.41300	9.69897	9.69897	9.80008
log sen δ	9.724472	9.45672n	9.90040n	8.97204	9.69818n	9.92623n
log cos δ	9.928318	9.98144	9.78284	9.99808	9.93779	9.72973
log tg δ	9.796154	9.47528n	0.11756n	8.97396	9.76039n	0.19650n
log tg φ	9.821606	9.82161n	9.82161n	9.82161n	9.82161n	9.82161n
log sen φ	9.742462n	9.74246n	9.74246n	9.74246n	9.74246n	9.74246n
log cos φ........	9.920856	9.92086	9.92086	9.92086	9.92086	9.92086
log (cos φ cos δ)..	9.849174	9.90230	9.70370	9.91894	9.85865	9.65059
log I	9.466934n	9.19918	9.64286	8.71450n	9.44064	9.66869
log II	9.548144	9.31530	9.11670	9.61791	9.55762	9.45067
Dif.	0.081210	9.88388	9.47384	0.90341	9.88302	9.78198
log Gauss.	9.313065	0.24684	0.11319	0.84547	0.24647	0.20556
log cos Z	8.779999	9.56214	9.75605	9.55997	9.80409	9.87425
Z	86°32′43″8	68°36′ 2″	55°14′ 0″	68°42′44″	50°26′12″	41°31′49″
log sen Z	9.999210	9.96898	9.91460	9.96931	9.88701	9.82152
log (sen φ cos H)	9.441432n	9.15546n	9.15546n	9.44143n	9.44143n	9.54254n
log (—tg δ cos φ)	9.717010n	9.39614	0.03842	8.89482n	9.68125	0.11736
Dif.	9.724422	0.24068	0.88296	9.45339	0.23982	0.57482
log Gauss.	0.184742	9.86954	0.82201	0.10858	9.86751	0.44041
log denom........	9.901752n	9.02500	9.97747	9.55001n	9.30894	9.98295
log tg A	0.035779	0.95994	0.00747n	0.38752	0.62859	9.90675n
A	227°21′26″9	276°15′30″	314°30′26″	247°43′13″	76°45′56″	321°6′16″
log sen A.......	9.866638n	9.99740	9.85319n	9.96630n	9.98831	9.79789n
log cos A.......	9.830859n	9.03747	9.84572	9.57878n	9.35972	9.89114
log (sen δ cos H)	9.423442	8.86972n	9.31340n	8.67101	9.39715n	9.72631

log (—tg φ cos δ)	9.749924	9.80304	9.60444	9.81968	9.75939	9.55133
Dif.	9.673518	9.93332	0.29104	8.85133	0.36224	0.17498
log Gauss.	9.167772	0.87947	9.87978	0.02979	0.11484	9.69563
log denom.	9.917696	9.74919	9.29318	9.84947	9.51199	9.24696n
log tg p	0.019835n	0.23575n	0.69176n	0.08806	0.42554	0.64274
p	—46°18'28"6	—59°50'21"	—78°30'21"	—50°46' 9"	+69°25'32"	257°10'32"
log sen p	9.859176n	9.93682n	9.99120n	9.88908n	9.97138	9.98903n
log cos p	9.839341	9.70108	9.29944	9.80103	9.54584	9.34629n
log (cos δ senp) ..	9.787494n	9.91826	9.77404n	9.88716n	9.90917	9.71876n
log (cos φ sen A)..	9.787494n	9.91826n	9.77405n	9.88716n	9.90917	9.71875n

Pareja.........	2—1	1—2	4—3	3—4	6—5	5—6
$A_m - A_n$.......	+48°54' 3"	—48°54' 3"	—66°47'13"	+66°47'13"	244°20'21"	115°39'39"
log ΔZ".........	3.55630n	3.55630n	3.55630n	3.55630n	3.55630n	3.55630n
log Δ t.........	3.76881	3.63804	3.78225	3.66914	3.64713n	3.83755
log d (n-m)	0.13077	9.86923	0.11311	9.88689	9.80958n	0.19042n
log cosec. a_n	0.12288	0.12288n	0.03665n	0.03665	0.04510n	0.04510
log (d cosec. a_n)...	0.25365	9.99211n	0.14976n	9.92354	9.85468	0.23552n
log (— cotg. a_n)...	9.94068n	9.94068	9.63233	9.63233n	9.68163n	9.68163
Dif.	0.31297	0.05143	0.51743	0.29121	0.17305	0.55389
log Gauss.	0.02356	9.09936	0.36017	9.98012	9.68979	0.41162
log cotg. A_n	9.96424	9.04004	9.99250n	9.61245	9.37142	0.09325n
A_n	227°21'4	276°15'4	314°30'3	247°43'3	76°45'9	321°6'3

N.°	7	8	9	2'	5'
Estrella	Cruz	Lira	Aguila		
Nombre.........	Cruz	Wega	Altair	Sirio	Fomalhaut
Magnitud.......	1,6	0,1	0,9	—1,6	1,3
	h m s	h m s	h m s		
1940 α	12 23 14,7	18 34 54,3	19 47 51,3		
1940 δ	—62°46'0"	+38°43'36"	+8°42'31"		
H	—78°15'	+50°	+75°	—60°	+75°
log sen H	9.99080n	9.88425	9.98494	9.93753n	9.98494
log cos H	9.30887	9.80807	9.41300	9.69897	9.41300
log sen δ	9.94898n	9.79630	9.18015	9.45672n	9.69818n
log cos δ	9.66050	9.89217	9.99496	9.98144	9.93779
log tg δ	0.28848n	9.90413	9.18519	9.47528n	9.76039
log tg φ	9.82161n	9.82161n	9.82161n	9.82161n	9.82161n
log sen φ	9.74246n	9.74246n	9.74246n	9.74246n	9.74246n
log cos φ	9.92086	9.92086	9.92086	9.92086	9.92086
log (cos φ cos δ)..	9.52136	9.81303	9.91582	9.90230	9.85865
log I..........	9.69144	9.53876n	8.92261n	9.19918	9.44064
log II	8.89023	9.62110	9.32882	9.60127	9.27165
Dif.	9.19879	0.08234	0.40621	9.59791	9.83101
log Gauss.	0.06373	9.31965	0.18979	0.14494	0.22470
log cos Z	9.75517	8.85841	9.11240	9.74621	9.66534
z	55°18'49"	85°51'5"	82°33'25"	56°7'12"	62°26'8"
log sen Z	9.91502	9.99886	9.99632	9.91919	9.94768
log (sen φ cos H).	9.05133n	9.55053n	9.15546n	9.44143n	9.15546n
log (—tg δ cos φ).	0.20934	9.82499n	9.10605n	9.39614	9.68125
Dif.	1.15801	9.72554	9.95059	0.04529	0.52579
log gauss.	1.12673	0.18513	0.27703	9.04110	0.37213
log den	0.17806	0.01012n	9.43249n	8.43724n	9.52759
log tg A	9.81274n	9.87413n	0.55245n	1.50029	0.45735

A.......	326°59'11"	143°11'21"	105°39'21"	268°11'24"	70°46' 6"
log sen A.......	9.73626n	9.77755	9.98358	9.99978n	9.97506
log cos A.......	9.92352	9.90342n	9.43114n	8.49949n	9.51770
log (sen δ cos H..	9.25785n	9.60437	8.59315	9.15569n	9.11118n
log (—tg φ cos δ)	9.48210	9.71378	9.81657	9.80305	9.75940
Dif.........	0.22425	9.89059	8.77658	0.64736	0.64822
log gauss........	9.82988	0.24976	0.02521	0.53653	0.53764
log den..........	9.08773	9.96354	9.84178	9.69222	9.64882
log tg p	0.90307n	9.92071	0.14316	0.24531n	0.33612
p	—82°52'29"	39°47'55"	54°16'37"	—60°23'2"	65°14'29"
log sen p	9.99663n	9.80624	9.90947	9.93920n	9.95812
log cos p	9.09356	9.88553	9.76631	9.69389	9.62200
log (cos δ sen p) .	9.65713n	9.69841	9.90443	9.92064n	9.89591
log (cos φ sen A) .	9.65712n	9.69841	9.90444	9.92064n	9.89592

Pareja..........	7—1	8—1	9—1	2'—1	5'—1
A_m —A_n	99°37'44"	—84°10'6"	—121°42'6"	40°49'57"	203°24'49"
log Δ Z"........	3.55630n	3.55630n	3.55630n	3.55630n	3.55630n
log Δ t..........	3.89918	3.85789n	3.65186n	3.63566	3.66038n
log d(n-m)	9.86963	9.91092n	0.11695n	0.13315	0.10843n
log cosec. a_n	0.00616	0.00225n	0.07018n	0.18452	0.40081n
log (d. cosec. a_n)	9.87579	9.91317	0.18713	0.31767	0.50924
log (—cotg a_n) ..	9.22957	9.00918	9.79075n	0.06340n	0.36349n
Dif.........	9.35378	9.09601	0.39638	0.25427	0.14575
log gauss........	0.08843	0.05105	0.17348	9.90084	9.60072
log cotg A_n	9.96422	9.96422	9.96423	9.96424	9.96421
An.............	227°21'4	227°21,'4	227°21,'4	227°21,'4	227°21,'5

Como vemos por los resultados, se puede obtener el azimut de cualquier estrella siguiendo el método indicado. Ahora se presenta el problema de saber cuáles fueron las estrellas observadas. Para esto basta observar dos veces la misma estrella que se trata de identificar, con un intervalo de tiempo adecuado entre ambas observaciones para garantizar los resultados.

Consideremos una segunda observación de Sirio y otra de Fomalhaut y tratemos de encontrar sus ascensiones rectas y sus declinaciones.

Pero antes veamos las fórmulas que se deben emplear.

Tendremos

$$\cos\varphi = \frac{\Delta Z}{\Delta t} \operatorname{cosec} A$$

se deduce: $\varphi = -33^\circ\ 33'$

Los cuatro elementos consecutivos del triángulo aplicados a las dos observaciones de la misma estrella, es decir-

$$(180 - A_1),\quad (90 - \varphi),\quad H_1,\qquad (90^\circ - \delta_1)$$

$$(180 - A_2),\quad (90 - \varphi),\quad (H_1 + \tau),\quad (90^\circ - \delta_1)$$

en donde A_1 H_1 son el azimut y el ángulo horario de la primera observación, δ_1 la declinación común a ambas observaciones y τ el intervalo entre las dos.

$$tg\, H_1 = \frac{-\, cotg\, A_2 - sen\, \varphi\, tg \frac{\tau}{2}}{sen\, \varphi + cotg\, \tau\, cotg\, A_2 - cosec\, \tau\, cotg\, A_1}$$

Una vez obtenido el ángulo horario H_1 se obtiene la declinación de la estrella por la fórmula

$$tg\, \delta_1 = \frac{sen\, \varphi \cos H_1 - sen\, H_1\, cotg\, A_1}{\cos \varphi}$$

Además

$$sen\, Z_1 = \frac{\cos \delta_1\, sen\, H_1}{sen\, A_1}$$

$$tg\, p_1 = \frac{sen\, H_1}{sen\, \delta_1 \cos H_1 - \cos \delta_1\, tg\, \varphi}$$

En consecuencia, se deducen todos los elementos menos la ascensión recta. Para identificar las estrellas habrá que considerar dos estrellas y deducir de los ángulos horarios calculados por la fórmula anterior y el intervalo de las observaciones, la diferencia $(\alpha_1 - \alpha_2)$ de las ascensiones rectas. Ahora si que es fácil identificar las estrellas cuando se conocen las declinaciones y la diferencia de las ascensiones rectas. Vamos a aplicar estas consideraciones a las estrellas (2) y (5), observadas cada una dos veces, con un intervalo de una hora sideral.

Estrella	2	2′	5	5′
A	276°15,′5	268°11,′4	76°45,′9	70°46,′1
log sen φ	9.74246n	9.74246n	9.74246n	9.74246n
log tg $\tau/2$	9.11943	9.11943	9.11943	9.11943
log cotg τ	0.57195	0.57195	0.57195	0.57195
log cosec. τ	0.58700	0.58700	0.58700	0.58700
log cotg A_1	......	9.04006n	......	9.37141
log (—cotg A_2)	8.49971n	......	9.54265n	
log (—sen φ tg $\frac{\tau}{2}$)	8.86189	......	8.86189	
Dif.	0.36218	......	0.68076	
log gauss	0.11474	......	0.57918	
log I	8.61445	......	9.44107n	
log (cotg τ cotg A_2)	9.07166	......	0.11460	
log (—cosec τ cotg A_1)	9.62706	......	9.95841n	
Dif.	9.44460	......	0.15619	

log gauss	0.10665	......	9.63630
log II	9.73371	......	9.59471
log sen φ	9.74246n	......	9.74246n
Dif.	0.00875	......	0,14775
log gauss	8.30850	......	9.60771
log III	8.04221n	......	9.20242n
log tg H_1	0.57224n	......	0.23865
H_1	—75°0,'5	......	+60°0,'3
log tg φ	9.82161n	......	9.82161n
log cos H_1	9.41276	......	9.69890
log (I)	9.23437n	......	9.52051n
log sec φ	0.07914	......	0.07914
log (—sen H_1)	9.98496	......	9.93755n
cot A_1	9.04006n	......	9.37141
log (II)	9.10416n	......	9.38810n
Dif.	9.86979	......	9.86759
log gauss	0.24079	......	0.23985
log tg δ	9.47516n	......	9.76036n
δ	—16°38′	......	—29°56′
log sen δ	9.4567n	......	9.6981n
log cos δ	9.9814	......	9.9378
log (cos δ sen H_1)	9.9664n	......	9.8753
log cosec A_1	0.0026n	......	0.0117
log sen Z	9.9690	......	9.8870
Z	68°36′	......	50°26′
log (sen δ cos H_1)	8.8695n	......	9.3970n
(—cos δ tg φ)	9.8030	......	9.7594
Dif.	0.9335	......	0.3624
log gauss	0.8797	......	0.1151
log den.	9.7492	......	9.5121
log tg p	0.2358n	......	0.4254
p	—59°50′	......	69°25′

Ya conocemos las declinaciones y los ángulos horarios de las dos estrellas. Para determinar la diferencia de sus ascensiones rectas, será necesario conocer la diferencia en hora sideral de las dos observaciones de una misma estrella.

En efecto, sean θ_1, θ_2 los tiempos sidéreos de las dos observaciones. Tenemos

$$H_1 = \theta_1 - \alpha_1$$

$$H_2 = \theta_2 - \alpha_2$$

$$H_2 - H_1 = (\theta_2 - \theta_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$

De aquí se despeja $(\alpha_2 - \alpha_1)$. Una vez identificadas las estrellas se podrá obtener la corrección de las horas siderales observadas. Si la observación se ha hecho con un reloj de tiempo medio y se quiere conocer su corrección se procederá como sigue.

Las estrellas resultaron ser:

	h	m	s	
Sirio:	6	42	30	—16° 38′
Fomalhaut:	22	54	20	—29° 56′

		h	m	s		h	m	s		h	m	s
Sirio:	$H + \alpha = \theta = -$	5	0	2	+	6	42	30	=	1	42	28
Fom.:	$H' + \alpha' = \theta' =$	4	0	1,2	+	22	54	20	=	2	54	21,2

Se trata ahora de convertir tiempo sideral en tiempo medio. La fecha es primero de octubre de 1940. La localidad es Santiago. Tenemos:

	h	m	s	h	m	s
Tiempo sidéreo	1	42	28	2	54	21,2
θ_o (Anuario)	0	39	4,2	0	39	4,2
Diferencia	1	3	23,7	2	15	17.0
Red. a.tm	—		10,3		—	22.1
Intervalo medio	1	3	13.4	2	14	54.9
(Supuesta) Hora media obs.	1	2	40.—	2	13	20.5
c p	—		33.4		—	34.4

Siguiendo el desarrollo de las fórmulas llegamos a resultados teóricos lo bastante exactos como para creer que el método explicado fuera apto para determinarlo todo; pero no hay que exagerar la bondad del procedimiento por la exactitud de los resultados. Como ya hemos visto, el método se apoya en una aproximación. Por lo tanto los resultados también deben considerarse aproximados.

Para hacer ver el grado de convergencia de las series de Taylor aplicadas, vamos a calcular numéricamente los términos de ellas para una diferencia en distancia zenital de 7200″ = 2 grados sexagesimales.

Estrella	Castor	Castor
Z	84°32′43″,8	86°32′43″,8
log sen Z	9.998029	9.999210
log cos Z	8.977976	8.779999
log (—sen φ send δ)	9.466934	9.466934
Dif.	9.511042	9.313065
log gauss	0.122009	0.081210
log num	9.588943	9.548144
log (cos φ cos δ)	9.849174	9.849174
log cos H	9.739769	9.698970
H	—56°41′4″,4	—60°0′0,″0
log sen H	9.922029n	9.937531n
log (sen φ cos H)	9.482231n	9.441432n
log (—tg δ cos φ)	9.717010n	9.717010n
Dif.	9.765221	9.724422
log gauss	0.199316	0.184742
log den.	9.916326n	9.901752n
log tg A	0.005703	0.035779

Resumen		
(1)—(2)	—11936″,6	+11935,″1
	—3°18′56″6	+3°18′55,″1
H	—56 41 4,4	—60 0 0,0
H′	—60 0 1,0	—56°41′4″,9

A	225°22'34",3	227°21'26",9
log sen A	9.852318n	9.866638n
log cos A	9.846615n	9.830859n
log (sen δ cos H)	9.464241	9.423442
log (—tg φ cos δ)	9.749924	9.749924
Dif.	9.714317	9.673518
log gauss	0.181268	0.167772
log den.	9.931192	9.917696
log tg p	9.990837	0.019835n
p	—44°23'44"3	—46°18'28"6
log sen p	9.844855n	9.859176n
log cos p	9.854018	9.839341
log (cos δ sen p)	9.773173n	9.787494n
log (cos φ sen A)	9.773174n	9.787494n
ΔZ"	+7200"	—7200"
log ΔZ	3.857332	3.857332n
log (1)	4.084158n	4.069838
(1)	—12138",3	+11744"6
log (cos A cos p)	9.70063n-10	9.67020n-10
log cosec H	0.07797n	0.06247n
log $(1)^2$	8.16832	8.13968
log sen 1"	4.68557-10	4.68557-10
log 0.5	0.69897-10	9.69897-10
log (2)	2.33146	2.256889
(2)	+214",5	+180",6
log $\cos^2$ A	9.69323	9.6617
log $\cos^2$ p	9.70804	9.6787
Dif	9.98519	9.9830
g	0.29368	0.2926
	0.00172	9.9713
log (—cos A cos p cos H)	9.44040	9.3692
Dif	9.43868	9.3979
g	0.10537	0.0969
	0.10709	0.0682
log cosec^2 H	0.15594	0.1249
log 1/6	9.22185-10	9.2218-10
log $(1)^3$	12.25248n	12.2095
log sen^2 1"	9.37114-20	9.3711-20
log (3)	1.10850n	1.9955
(3)	—12",8	+9.9

Determinación de (A'—A)

Estrella	α Gemelos	α Gemelos
log ΔZ"	3.857332	3.857332n
log (—tg p sen Z)	9.988866	0.019045
log (1)	3.868466	3.838287n
(1)	+7387",0	—6891",1

log (cotg p cotg Z)	8.98911n	8.76096n
log cosec Z..............	0.00197	0.00079
log I	8.99108n	8.76175n
log (—cotg A)............	9.99430n	9.96422n
log (cosec^2 Z	0.00394	0.00158
log (cosec^2 p)...........	0.31030	0.28164
II	0.30854n	0.24744n
Dif. (con I)	8.68254	8.51431
log gauss...............	0.02042	0.01397
log( )	0.32896n	0.26141n
log 1/2	9.69897	9.69897
log ΔZ^2	7.71466	7.71466
log sen 1″	4.68557-10	4.68557
log (2)	2.42816n	2.36061n
(2)	—268″,0	—229″,4
log (cos Z sen p)..........	8.8228n	8.6392n
log cot A	9.9943	9.9642
log III	8.8171n	8.6034n
log (—cos p)	9.8540n	9.8393n
log cosec ^{2}A	0.2954	0.2667
log IV	0.1494n	0.1060n
Dif. (III-IV)	8.6677	8.4974
log gauss...............	0.0197	0.0134
log (III+IV)	0.1691n	0.1194n
log (—2)	0.3010n	0.3010n
log cotg^2 A.............	9.9886	9.9284
log cos p................	9.8540	9.8393
log V...................	0.1436n	0.0687n
Dif.	9.9745	9.9493
log gauss...............	0.2885	0.2764
log (III+IV+V)	0.4576n	0.3958n
logΔ Z^3	11.5720	11.5720n
log (cosec^3 p. cosec^3 Z)...	0.4714n	0.4248n
log sen^2 1″.............	9.3711-20	9.3711-20
colog 6	9.2219-10	9.2219-10
log (3)	1.0940	0.9856n
(3)	+12″,4	—9″,7
log cos^2 Z	7.9559	7.5600
log (1+cos^2 Z)..........	0.0039	0.0016
log (—cotg p)	0.0092	9.9802
log $\left(\frac{1}{6}\Delta^3 \text{ sen}^2\ 1''\right)$ ...	0.1650	0.1650n
	0.1781	0.1468n
(3′)	+1″,5	—1″,4
(1)+(2)+(3+3′)	+7132″,9	—7131″,6
	+1°58′52″,9	—1°58′51″6

Resumen

A 225°22′34″,3	A′ 227°21′26″,9
+1 58 52,9	—1 58 51,6
A′ 227°21′27″,2	A 225°22′35″,3