

Teoría de las radiaciones

POR GUSTAVO LIRA, Ingeniero Civil

PRELIMINARES

En la teoría de las radiaciones, se acostumbra considerar éstas principalmente bajo el aspecto de los fenómenos de energía (energía radiante) que ellas involucren. No obstante, no puede esta teoría desentenderse completamente de los otros aspectos geométricos y físicos que presentan las radiaciones, y cuyo estudio, en especial con respecto a las radiaciones luminosas (luz), constituyen la Óptica. La teoría de las radiaciones, por eso, en parte, y en especial en sus comienzos, aprovecha de las teorías de la Óptica (teoría ondulatoria y teoría electro magnética) aun cuando después se desarrolla sobre una base propiamente energética, (teoría de Planck), cuando las anteriores hipótesis resultan ineficaces para explicar, por ejemplo, las relaciones entre la energía radiante y la materia (distribución de la energía en el espectro del cuerpo negro).

Por eso iniciamos la teoría de las radiaciones (§ 1 y § 2), recordando lo más importante de los aspectos ondulatorios de las radiaciones, y también los puntos de partida que permiten considerar a la radiación como una entidad energética independiente.

§ 1.—RADIACIONES; RADIACIONES LUMINOSAS. LARGO DE ONDA. TEORÍAS ONDULATORIAS

La teoría de las radiaciones es válida para todas las radiaciones; sin embargo sus aplicaciones más importantes están en las *radiaciones luminosas*, nombre con que en Física se designa a las radiaciones que emiten los cuerpos por *incandescencia*, al ser calentados. La incandescencia no significa necesariamente producción de luz visible; por otra parte, las llamadas radiaciones luminosas comprenden también radiaciones invisibles que son las radiaciones ultravioletas y las radiaciones infrarrojas. Así un cuerpo calentado a temperatura no muy elevada emite *radiaciones infrarrojas*, a que es insensible el ojo humano; aumentando la temperatura, se agregan a las anteriores radiaciones, las *ultravioletadas*, que tampoco son visibles.

Se caracterizan las radiaciones por su *largo de onda* (λ). Este concepto es ca-

racterístico de dos teorías que la Física ha formulado para explicarse los fenómenos luminosos, mas generalmente los fenómenos de las radiaciones son: la teoría ondulatoria (Huyghens, Young, Fresnel), y la teoría electromagnética (Maxwell). Según la primera teoría, la luz se debería a la vibración transversal (en dirección perpendicular al rayo luminoso) de un medio especial, el éter cósmico, que se supone que llena todo el espacio no ocupado por la materia. Esta vibración sigue con respecto al tiempo una ley sinusoidal de período T característico de la radiación de que se trata, y tiene la propiedad de *propagarse*, según el rayo luminoso, en los medios transparentes a la radiación, con una velocidad determinada, que es la velocidad de la luz y que vale para el vacío (velocidad crítica)

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cms/seg.}$$

Con esta propagación, puntos del rayo luminoso que se encuentran en el mismo estado de movimiento (igual elongación, igual velocidad, igual aceleración) guardan una distancia fija, que es el largo de onda λ , el cual está ligado con el período T y la velocidad c por la relación fundamental de las ondulaciones

$$\lambda = cT$$

Las radiaciones se caracterizan entonces también por el largo de onda. Así, la luz visible comprende radiaciones que van desde la radiación decolor violado ($\lambda_v = 0,000038 \text{ cms.}$) hasta el color rojo ($\lambda_r = 0,000076 \text{ cms.}$); las radiaciones ultravioletas, que son invisibles, tienen largos de onda inferiores a λ_v , y las radiaciones infrarrojas, también invisibles, tienen largos de onda superiores a λ_r .

En la teoría ondulatoria, la luz tiene, como se ve, analogías con el sonido. Pero el sonido se propaga solamente en los medios materiales (sólidos, líquidos o gases), y no puede hacerlo en el vacío, en tanto que las radiaciones se propagan también en el espacio desprovisto de toda materia, como lo prueba la luz solar o la luz de las estrellas, que llegan a la tierra atravesando enormes distancias a través de los espacios celestes vacíos.

Pero, la teoría ondulatoria,—que con razón se la ha calificado de una Cinemática del éter cósmico—, debió suponer al éter diversas propiedades. Así, para explicar la velocidad muy elevada de propagación de la luz debió admitir que este medio posee una gran rigidez o una densidad extraordinariamente pequeña, o ambas propiedades a la vez. Admitir una densidad del éter cósmico fué necesario también para explicar el transporte de energía (energía radiante) que significa la propagación de las radiaciones, no obstante que la densidad es una de las propiedades características de la materia, y que el éter cósmico se había definido como un ente existente precisamente en donde no hay materia.

Ahora bien, ninguna experiencia ha logrado evidenciar la existencia del éter cósmico ni la de ninguna de las propiedades que se le atribuyen, y la teoría de la relatividad contiene en sus bases la afirmación de que el éter cósmico no existe. Además, el descubrimiento de los fenómenos electro-ópticos y magneto-ópticos mostraron la insuficiencia de la teoría ondulatoria.

Nació entonces la teoría electromagnética de la luz, según la cual este fenóme-

no está producido por dos campos de fuerza, un campo eléctrico y un campo magnético perpendiculares entre sí y normales al rayo luminoso, y cuyas intensidades varían con el tiempo según una ley sinusoidal de período T , los cuales campos se mueven según el rayo con la velocidad c de propagación de la luz, manteniéndose en concordancia de fase. Esta teoría explica sin dificultad cómo las radiaciones son portadoras de energía, cosa que en la teoría ondulatoria, como se dijo, exigía atribuir una densidad al éter cósmico.

En la teoría electromagnética sigue válida la relación fundamental

$$\lambda = cT$$

§ 2. CAVIDADES A TEMPERATURA CONSTANTE.—CUERPO NEGRO.—RADIACIÓN INTEGRAL

Con razonamientos muy simples y sobre la base de las primeras investigaciones que se hicieron sobre las radiaciones, la teoría de los intercambios (Prévost, Kirchhoff) estableció que en una cavidad o recinto cerrado que se mantiene a temperatura constante, existe una radiación compuesta, que comprende radiaciones de todos los largos de onda, en una proporción que es característica de cada temperatura, y que es distinta de una temperatura a otra. Esta radiación se mueve en el interior del recinto en todas direcciones; su composición es la misma en todos los puntos de la cavidad, y sobre ella no influye la naturaleza de sus paredes, de modo que todos los recintos cerrados que tienen la misma temperatura T , cualesquiera que sean sus volúmenes y la naturaleza de sus paredes, contienen una radiación de la misma composición. Esta radiación se denomina la *radiación integral* correspondiente a la temperatura T .

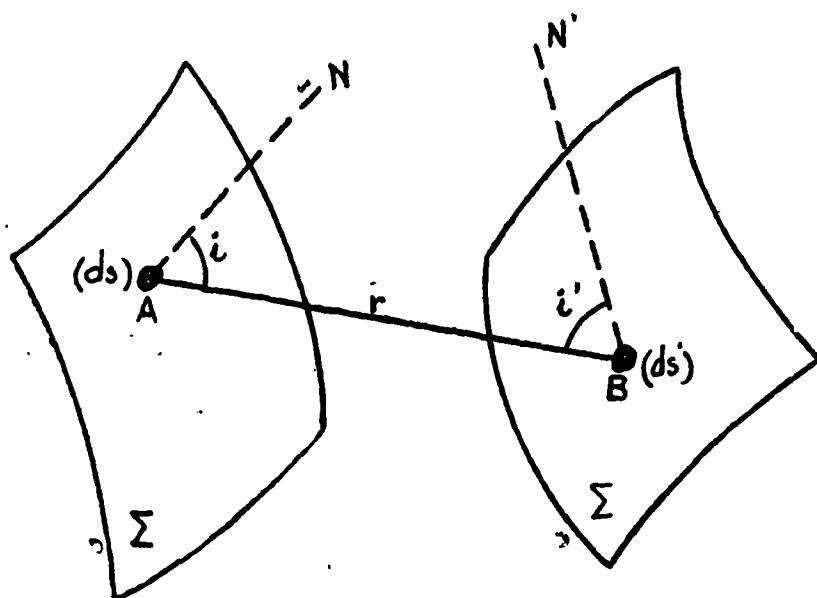
La cavidad que contiene la radiación integral debe ser cerrada, de modo que es difícil experimentar con dicha radiación, pues una abertura cualquiera que se practicara en la pared para sacar radiación integral, la modificaría; teóricamente para que esto no ocurra, dicha abertura debería ser infinitamente pequeña.

La radiación integral la emite también la superficie de un cuerpo cuyo poder de absorción (razón entre la energía que absorbe y la total energía que recibe) vale 1. Como los cuerpos pintados de negro (negro de humo, negro de platino, etc.), se acercan a esta condición, se llama *cuerpo físicamente negro* a un cuerpo hipotético que emitiera la radiación integral. Es posible que el sol sea un cuerpo físicamente negro.

TEORIA

§ 3. INTENSIDAD DE RADIACIÓN.—INTENSIDAD INTEGRAL Y MONOCROMÁTICA

Sea una superficie Σ colocada frente a otra superficie Σ' , y supongamos que la primera emita la radiación integral correspondiente a una temperatura absoluta T . La radiación emitida por Σ y que llega a la superficie Σ' proviene de lo que emiten los infinitos elementos superficiales ds pertenecientes a Σ , y que llegan a los infinitos elementos ds' de la superficie Σ' . Consideremos entonces el flujo elemental

FIG. 1.

de energía radiante emitido por ds y que llega a ds' . La cantidad de energía que constituye esta emisión, será, por unidad de tiempo:

1.º Proporcional al área aparente $ds \cos i$ que presenta la superficie elemental emisora normalmente al flujo elemental emitido;

2.º Proporcional al área aparente $ds' \cos i'$ que presenta la superficie elemental receptora normalmente al flujo elemental recibido;

3.º Proporcional a $\frac{1}{r^2}$, a virtud de la ley de la proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia; y

4.º Proporcional a un coeficiente que designaremos por i ,

Entonces escribiremos

$$d^4 W_i = \frac{i_s ds \cos i ds' \cos i'}{r^2} \quad (1)$$

i_s designa lo que llamaremos *intensidad de la radiación emitida por ds* .

Como se han supuesto en la figura ds y ds' infinitamente pequeños de segundo orden, la energía emitida es de cuarto orden de pequeñez; el índice i en el símbolo W de la energía indica que se trata de la energía emitida por ds en una dirección inclinada del ángulo i con respecto a la normal AN . En algunas aplicaciones (como se verá más adelante), será posible tomar como elemento superficial ds un área infinitamente pequeña de primer orden; entonces la energía será de tercer orden de pequeñez ($d^3 W_i$).

También puede faltar o no ser necesaria la consideración de la superficie Σ' que recibe o que es atravesada por la energía radiante que proviene de Σ , o sea

que la energía emitida por Σ se propagaría en tal caso en el espacio ilimitado situado a un lado de Σ . Entonces se ve que $\frac{ds' \cos i'}{r^2}$ es el ángulo sólido del cono infinitamente delgado (pincel) que contiene la radiación. Si se designa por dw ese ángulo sólido, se tendrá en vez de (1) la expresión.

$$d^2 W_i = i_s ds \cos i dw \quad (2)$$

Aquí dw es infinitamente pequeño de segundo orden; en las aplicaciones, puede ser infinitamente pequeño de primer orden, en cuyo caso se deberá poner en el primer miembro $d^2 W_i$.

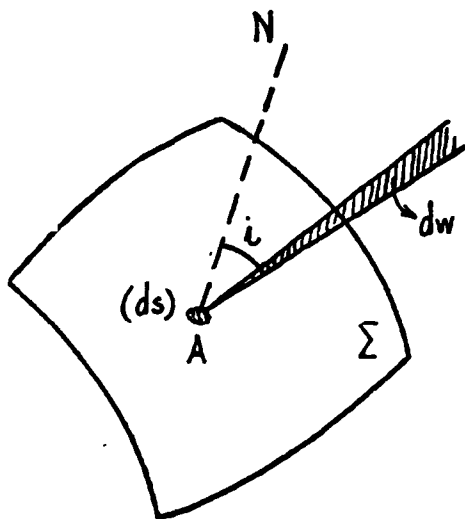


FIG. 2.

Pero la radiación integral que estamos considerando se compone de infinitas radiaciones de calidades diferentes, caracterizada cada una de ellas por su largo de onda λ . Entonces, la intensidad i_s de la radiación integral emitida por ds es la suma de las intensidades de las infinitas radiaciones que componen dicha radiación integral, y como i_s debe tener un valor finito, cada una de las intensidades, que designaremos en general por i_λ , de las radiaciones componentes, debe ser infinitamente pequeña. Por lo tanto, escribiremos

$$i_s = \sum_0^\infty i_\lambda = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$$

en donde $i_\lambda = e_\lambda d\lambda$, que es la intensidad de la radiación de calidad λ (más exactamente, de la radiación comprendida entre los largos de onda λ y $\lambda + d\lambda$) se llama *intensidad monocromática* de la radiación emitida por ds (*).

(*) El mismo nombre se da a e_λ , lo que en realidad no trae inconvenientes.

Entonces, para una radiación monocromática determinada emitida por ds , escribiremos las fórmulas (1) y (2) en las formas

$$(d^5 W_i)_\lambda = e_\lambda d\lambda \frac{ds \cos i \, ds' \cos i'}{r^2} \quad (1 \text{ bis})$$

$$(d^5 W_i)_\lambda = e_\lambda d\lambda \, ds \cos i \, dw \quad (2 \text{ bis})$$

El nuevo índice λ colocado en el símbolo de la energía, indica que se trata ahora sólo de la radiación de calidad λ , en vez de la radiación integral. Además, como la intensidad monocromática es infinitamente pequeña, ha aumentado en una unidad el orden de pequeñez de la energía considerada.

Como el primer miembro de estas ecuaciones es una energía por unidad de tiempo (dimensiones $L^2 M T^{-3}$), las dimensiones tanto de la intensidad i_λ de la radiación integral, como la intensidad monocromática $e_\lambda d\lambda$ serán

$$[i_\lambda] = [e_\lambda d\lambda] = M T^{-3}$$

Las dimensiones de e_λ serán por lo tanto

$$[e_\lambda] = L^{-1} M T^{-3}$$

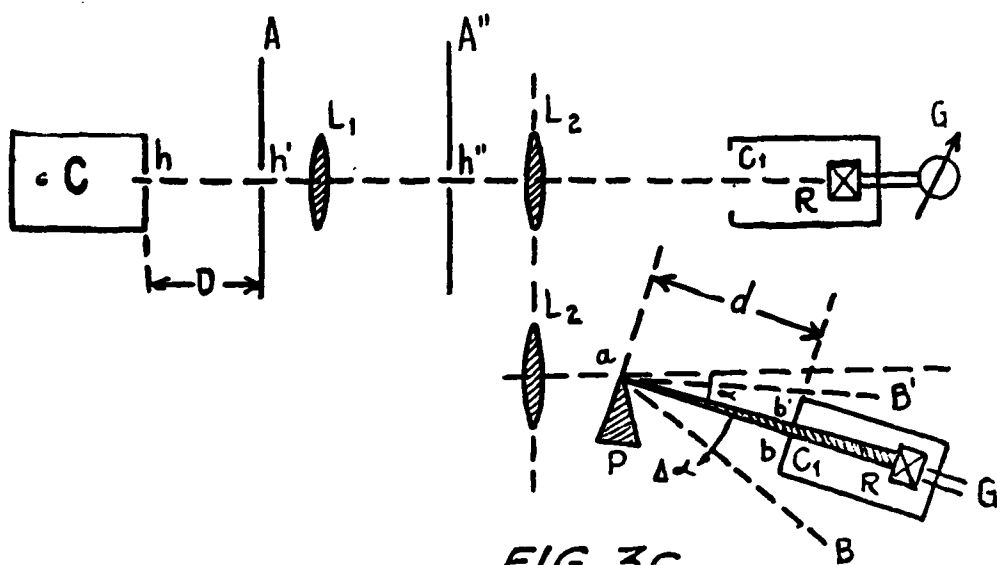
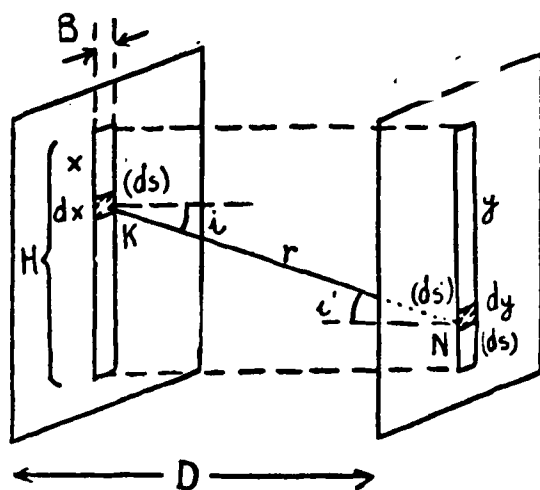
La intensidad de radiación en el sistema CGS se medirá en ergs por centímetro cuadrado; e_λ se medirá en ergs por centímetro cúbico, ambas por segundo de tiempo.

Para aclarar ideas, indicaremos desde luego cómo se determinan experimentalmente i_λ y e_λ .

§ 4. DETERMINACIÓN DE i_λ

Esta magnitud depende sólo de T . Para determinarla, es menester disponer de una fuente de energía radiante integral, y como tal puede tomarse un cilindro hueco C (fig. 3.a) que se calienta y se mantiene a la temperatura constante absoluta T . Entonces, si se practica en la pared de este cilindro una hendidura muy delgada h (en teoría deberá ser infinitamente delgada) esta abertura dejará salir bajo todas las inclinaciones i , radiación integral correspondiente a la temperatura considerada. Pero una pantalla opaca A' , en la cual se ha practicado otra abertura h' , detiene en gran parte esa radiación, y deja pasar sólo una parte W , que se podrá calcular integrando la ecuación (1).

Esta integral teóricamente se podrá hacer cuando tanto la abertura h como la h' tienen formas geométricas y una posición mutua determinada. Por ejemplo, si las dos aberturas son rectangulares y paralelas de ancho B y de altura H (como se ve en la perspectiva fig. 3b), y están a la distancia D , se puede considerar sin mu-

FIG. 3a.FIG. 3c.FIG. 3b.

cho error (cuando B es muy pequeño) que todos los rayos KN que pasan de una abertura a otra, están contenidos en un mismo plano, lo que simplifica la expresión de los cosenos de i y de i' . Se tendría entonces

$$ds = B dx$$

$$ds' = B dy$$

$$\cos i = \cos i' = \frac{D}{\sqrt{D^2 + (y-x)^2}}$$

$$r^2 = D^2 + (y-x)^2$$

valores que reemplazados en (1) dan

$$d^2 W = i_s \frac{B^2}{D^2} \frac{dx dy}{\left[1 + \left(\frac{y-x}{D}\right)^2\right]^2}$$

Por consiguiente

$$W = i_s \frac{B^2}{D^2} \int_0^H dx \int_0^H \frac{dy}{\left[1 + \left(\frac{y-x}{D}\right)^2\right]^2}$$

Haciendo esta integral doble por medio del desarrollo en serie, resulta finalmente

$$W = i_s \frac{B^2}{D^2} \frac{H^2}{D^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{H^2}{D^2} + \frac{1}{5} \frac{H^4}{D^4} - \dots\right)$$

lo que escribiremos

$$W = i_s J (*)$$

en donde J , como se ve, depende sólo de las características geométricas del sistema experimental. Luego

$$i_s = \frac{W}{J}$$

Falta entonces medir W . Para esto, a continuación de la pantalla A' se coloca una lente convergente L_1 que forma en la abertura h'' la imagen de h ; esta abertura h'' está colocada en el plano focal de otra lente L_2 , de modo que a la derecha de L_2 el flujo de radiación W queda constituido por un haz rectangular de rayos paralelos, los cuales por fin entran al cilindro C_1 en donde un radiómetro R mide la energía W que ese haz transporta. Por ejemplo el radiómetro R puede ser un bolómetro: entonces dos conductores eléctricos comunican el puente del bolómetro con un galvanómetro G cuya desviación, a la escala instrumental conocida de este aparato, dará el valor de W . En todo esto hay que hacer correcciones para tomar en cuenta

(*) El ejemplo que se ha supuesto de dos aberturas iguales y paralelas ha servido sólo para mostrar que es posible relacionar W con i_s . En la práctica pueden usarse otros dispositivos de aberturas, que conducirán a otros valores de J .

la disminución que por absorción sufre W en su recorrido desde C a C_1 . Para eso, todo el dispositivo, excepto G , puede encerrarse en una cámara vacía, lo que suprime la absorción por el aire, y las lentes L_1 y L_2 se hacen de sustancias cuyo poder de absorción sea despreciable para la energía radiante que se está midiendo, por ejemplo, sal gema (cloruro de sodio), fluorina (fluoruro de calcio), o sylvina (cloruro de potasio).

§ 5. MEDIDA DE e_λ .—CURVAS ESPECTRALES ISOTERMALES E ISOCROMÁTICAS

Para la medida de e_λ se debe en primer lugar descomponer el haz W de la determinación anterior en las radiaciones elementales que lo componen, lo que se consigue dispersándolo por medio de un prisma P (fig. 3 c), o sea, como se dice en óptica física, produciendo el espectro de la radiación integral W . Este prisma desviará desigualmente los rayos constitutivos del haz W : los rayos más refrangibles (menor largo de onda λ) se desvían más (por ejemplo según $a B$), y los menos refrangibles (mayor largo de onda) se desvían menos (por ejemplo según $a B'$). Ahora bien, la desviación α que experimenta un rayo de calidad λ por efecto del prisma, depende del ángulo de incidencia, del ángulo de refringencia del prisma, y del índice de refracción n_λ que presenta la sustancia de que está hecho el prisma, para la radiación λ . Todos estos son datos, de modo que en definitiva α guarda con λ una relación que se puede calcular, en tal forma que bastará medir la desviación que un rayo ha experimentado por efectos de la interposición del prisma, para saber qué largo de onda tiene la radiación que se propaga según ese rayo. Si se hacen estos cálculos para una serie de valores de λ , los resultados se pueden llevar gráficamente en un sistema de coordenadas α, λ , obteniéndose curvas como la de la fig. 4 ($M P N$).

Con estos antecedentes, la medida de e_λ se hace como sigue, aplicando la fórmula (1 bis) integrada para el caso:

$$\begin{aligned} dW &= e_\lambda d\lambda \frac{B^2 H^2}{D^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{H^2}{D^2} + \frac{1}{6} \frac{H^4}{D^4} - \dots \right) \\ &= e_\lambda d\lambda \cdot J \end{aligned}$$

Pero como no se pueden hacer medidas con cantidades infinitamente pequeñas, escribiremos esta ecuación, reemplazando las diferenciales por incrementos:

$$\Delta W = e_\lambda \Delta \lambda J$$

de donde

$$e_\lambda = \frac{\Delta W}{\Delta \lambda \cdot J}$$

Entonces, si se tapa el cilindro C_1 con una tapa que tenga una abertura rectangular de ancho

$$e = b b'$$

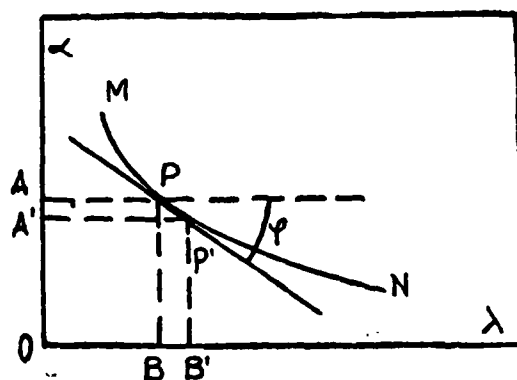


FIG. 4.

y se coloca C_1 en la posición de la *fig. 3 c*, el radiómetro R medirá el flujo ΔW de energía que transportan los rayos comprendidos entre ab y ab' . Ahora bien, el rayo ab ha sufrido la desviación α ; entonces, si se lleva este valor de α al diagrama de la *fig. 4*, ($\alpha = OA$), la abscisa OB nos dará λ . El otro rayo extremo ab' ha sufrido la desviación $(\alpha - \Delta\alpha)$, siendo

$$\Delta\alpha = \frac{bb'}{ab} = \frac{e}{d}$$

Si se lleva este valor a la figura 4 (según AA') se ve que BB' dará el valor de $\Delta\lambda$, y se tendrá allí

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\alpha}{\tan\varphi} = \frac{e}{d \tan\varphi}$$

de modo que en definitiva se obtendrá

$$e_\lambda = \frac{\Delta W d \tan\varphi}{J e}$$

φ aquí es el ángulo de inclinación de la cuerda PP' , o sea, prácticamente el ángulo de inclinación de la tangente a la curva de la *fig. 4*, en el punto P .

Variando la posición del cilindro C_1 , a otros ángulos α , se determinarán así otros valores de e_λ correspondientes a otros valores de λ . Si se llevan los resultados que así se obtengan en un diagrama e_λ, λ (*fig. 5*), se obtiene, para la temperatura T del cilindro C que produce la radiación investigada, una curva tal como la ABC . Cambiando la temperatura a otra $T' > T$ se obtendría otra curva ($A'B'C'$). Se ve, entonces, que creciendo la temperatura, todas las ordenadas crecen, y la ordenada máxima (BB_1) se desplaza hacia la izquierda. Esta última característica

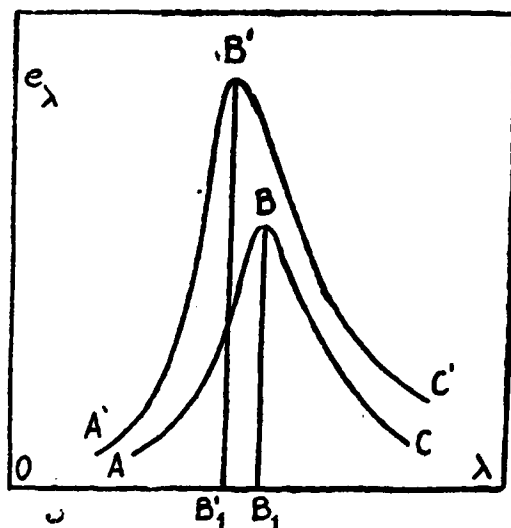


FIG. 5.

constituye la ley del desplazamiento de Wien (§ 17). Como cada una de estas curvas corresponde a una temperatura constante, se les da el calificativo de *isotermiales*, y como ellas resultan de la investigación del espectro de la radiación integral, se las llama también curvas *espectrales* de la radiación.

Si se cortan una serie de curvas ABC , $A'B'C'$, $A''B''C''$ por una vertical correspondiente a un determinado valor de λ , se obtendrá una serie de valores de e_λ correspondientes a una serie de valores de T . Llevando estas series en un sistema de coordenadas e_λ , T , se obtienen las llamadas curvas *isocromáticas* (*).

§ 6. PODER EMISIVO

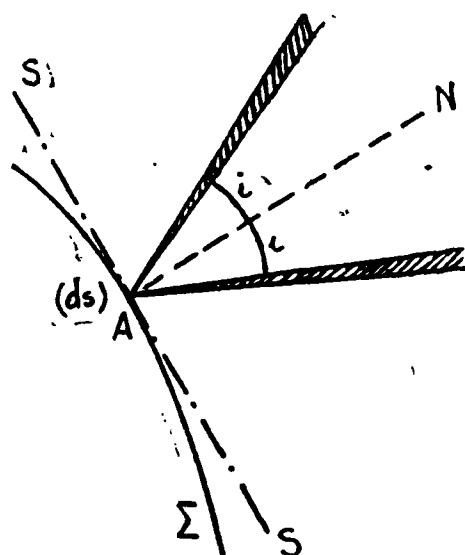
Consideremos el elemento ds perteneciente a la superficie Σ , que dibujamos ahora (*fig. 6*) de perfil. Este elemento ds emite la energía radiante según rayos que parten de A en todas direcciones, dentro del ángulo sólido total 2π que se desarrolla a un lado del plano SS tangente en A a la superficie Σ . Los rayos que parten de A formando el mismo ángulo i con la normal AN , forman un cono de ángulo sólido

$$w = 2\pi (1 - \cos i)$$

y quedan contenidos por tanto dentro del ángulo sólido elemental anular

$$dw = 2\pi \sin i \, di$$

(*) El dispositivo experimental que en la práctica se usa para la medida de e_λ difiere del esquematizado en *fig. 3*. Así, en lugar de lentes, se usan combinaciones de espejos planos y esféricos; además, se prefiere determinar directamente las curvas isocromáticas, y de ellas deducir las curvas isotermiales.

FIG. 6.

Entonces, la ecuación (2 bis) se escribirá (ahora dw es de primer orden de pequeñez):

$$(d^3 W)_\lambda = 2\pi e_\lambda d\lambda ds \sin i \cos i di$$

Integrando para todo el espacio en que se propaga la radiación emitida, resulta:

$$\begin{aligned} (d^3 W)_\lambda &= \pi e_\lambda d\lambda ds \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin i \cos i di \\ &= \pi e_\lambda d\lambda ds \left[\sin^2 i \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi e_\lambda d\lambda ds \end{aligned}$$

Entonces, la total energía de calidad λ que emite por unidad de tiempo la unidad de superficie valdrá

$$\frac{(d^3 W)_\lambda}{ds} = \pi e_\lambda d\lambda$$

Esta potencia emitida por unidad de superficie se llama *poder emisor monocrómico*, y se designa por E_λ

$$E_\lambda = \pi e_\lambda d\lambda \quad (3)$$

La potencia irradiada de todas las calidades (E) valdrá evidentemente

$$E = \pi \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda \quad (4)$$

y la llamaremos *poder emisivo integral*

Ahora, recordando que

$$i_{\lambda} = e_{\lambda} d\lambda$$

y que

$$i_s = \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda$$

se tendrán las relaciones

$$E_{\lambda} = \pi i_{\lambda} \quad (3 \text{ bis})$$

$$E = \pi i_s \quad (4 \text{ bis})$$

fórmulas que relacionan los poderes emisivos (monocromático e integral) con las intensidades de radiación (monocromática e integral)

§ 7. DENSIDAD DE RADIACIÓN

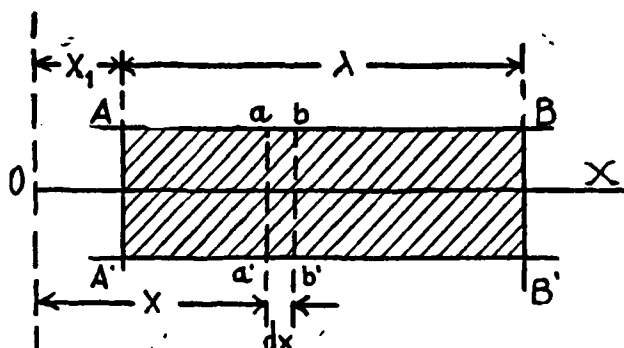
La radiación emitida por la superficie de un cuerpo, al propagarse por el espacio vecino transparente a ella, ocupa dicho espacio. Si en un punto de ese espacio se considera un elemento $d\tau$ de volumen, y se encuentra que en un cierto instante ese volumen contiene la cantidad dW de energía, se da el nombre de *densidad de radiación* en ese punto y en ese instante a la razón $\frac{dW}{d\tau}$, que es, por lo tanto la energía correspondiente a la unidad de volumen del medio.

Designaremos por U esta densidad cuando se trata de la radiación integral, y por U_{λ} cuando se trata de una radiación monocromática. Es evidente desde luego, por tratarse de magnitudes escalares, que

$$U = \sum_0^{\infty} U_{\lambda}$$

Deduciremos para U_{λ} una expresión que es válida dentro de los conceptos de la teoría ondulatoria, cuando se atribuye una densidad al éter cósmico. Supongamos para esto que luz, o en general radiación de calidad λ , se propaga según rayos paralelos a un eje OX de coordenadas (*fig. 7*), y consideremos un haz de estos rayos de sección transversal Ω . En un instante t , las partículas de éter cósmico contenidas entre una sección aa' (distante x del origen) y otra infinitamente próxima bb' tendrán una elongación cuyo valor, suponiendo que en el instante $t = 0$ en el origen O es nula, es (ecuación del rayo):

$$s = s_0 \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

**FIG. 7.**

La velocidad v de estas partículas de éter valdrá

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi s_o}{T} \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Entonces, la energía de la masa de éter contenida entre aa' y bb' sería, llamando s la densidad hipotética del éter cósmico:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2} s \Omega dx v^2 \\ &= \frac{2\pi^2 s_o^2 \Omega s}{T^2} \left[\cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]^2 dx \end{aligned}$$

y la energía contenida entre las secciones AA' y BB' cuya distancia es λ sería

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi^2 s_o^2 \Omega s}{T^2} \int_{x_1}^{x_1 + \lambda} \left[\cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{\pi^2 s_o^2 \Omega s \lambda}{T^2} \end{aligned}$$

Pero $\Omega \lambda$ es el volumen que contiene la energía W ; luego, la densidad U_λ de la energía valdrá

$$U_\lambda = \frac{W}{\Omega \lambda} = \frac{\pi^2 s_o^2 s}{T^2} = \frac{\pi^2 s_o^2 s c^2}{\lambda^2} = \frac{A}{\lambda^2} \quad (5)$$

En esta fórmula, A es constante, si permanece la misma la amplitud s_0 de la oscilación. En esas condiciones, ella indica que la densidad de la radiación es inversamente proporcional al cuadrado del largo de onda.

Pero, para el éter cósmico, como se ha dicho, la densidad s sería nula (puesto que el éter no es materia o bien no existe); con esto A tendría el valor cero, y la fórmula (5) deja de tener significación, como la tiene en cambio por ejemplo en Acústica, en donde ella es la expresión conocida de la intensidad del sonido, que es una ondulación que se propaga en medios ponderables. Sin embargo, aplicaremos esta fórmula a las radiaciones, porque ella conduce a un resultado exacto cuando se la emplea para la determinación de la presión de radiación.

§ 8. PRESIÓN DE RADIACIÓN

Maxwell dedujo matemáticamente que la radiación debe ejercer una presión sobre las superficies en que incide. Esta presión es extraordinariamente pequeña, y exige instrumentos de muy alta sensibilidad para ponerla en evidencia, como pu-

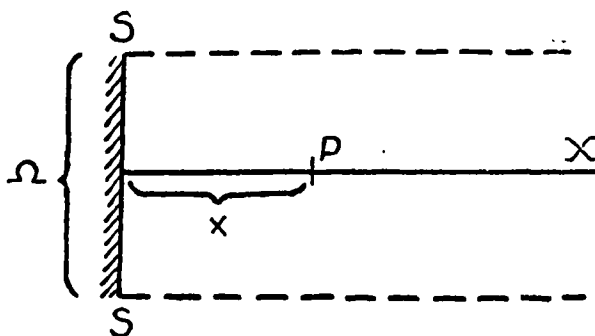


FIG. 8.

dieron hacerlo por primera vez Bartoli y otros, mucho después de la predicción de Maxwell.

Deduciremos primeramente la presión que ejerce una radiación de largo de onda λ que incide normalmente sobre un espejo perfectamente reflejante que se mueve con velocidad v al encuentro de la radiación, y haremos esta deducción sobre la base de la teoría ondulatoria, o sea como si el éter cósmico fuere un medio ponderable.

Supongamos, primero, (fig. 8) el espejo SS inmóvil en el origen O del eje OX de coordenadas, que tomamos normal al espejo. Entonces la radiación incidente se mueve en el sentido de las x negativas, y la radiación reflejada en el sentido de las x positivas.

Como el punto O está continuamente en reposo (elongación nula), en el punto P la ecuación del rayo incidente será:

$$s = s_o \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

y la del rayo reflejado será:

$$s' = s'_o \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Para $x = 0$, como sobre el espejo perfecto habrá siempre un nodo de vibración, debe tenerse, en cualquier instante t :

$$s + s' = 0$$

de donde

$$s'_o = -s_o$$

Ahora, si el espejo se mueve con velocidad v , el rayo incidente no habrá sufrido modificación:

$$s = s_o \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

En cambio, la radiación reflejada, que ha experimentado el efecto del movimiento del espejo, puede tener un largo de onda distinto y por tanto un período de vibración también distinto del largo de onda y del período de la radiación incidente. Su ecuación del rayo deberá entonces escribirse:

$$s' = s'_o \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T'} - \frac{x}{\lambda'} \right)$$

De nuevo la suma $s + s'$ debe anularse en el espejo, o sea para $x = vt$, y para cualquier valor de t . Luego debe verificarse continuamente que

$$s_o \operatorname{sen} 2\pi t \left(\frac{1}{T} + \frac{v}{\lambda} \right) + s'_o \operatorname{sen} 2\pi t \left(\frac{1}{T'} - \frac{v}{\lambda'} \right) = 0$$

Esto exige al mismo tiempo

$$\text{la } s'_o = -s_o$$

$$\frac{1}{T} + \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{T'} - \frac{v}{\lambda'}$$

Pero
$$T = \frac{\lambda}{c}; \quad T' = \frac{\lambda'}{c}$$

Reemplazando queda:

$$\frac{c+v}{\lambda} = \frac{c-v}{\lambda'}$$

o sea
$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{c+v}{c-v} \quad (6)$$

lo que comprueba la predicción hecha de que el movimiento del espejo produce una radiación reflejada de calidad λ' distinta de la radiación incidente λ . La densidad U' de la radiación reflejada será también distinta de la densidad U de la radiación incidente, y según las radiaciones (5) y (6) se tendrá (*)

$$\frac{U'}{U} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{(c+v)^2}{(c-v)^2}$$

de donde

$$U' = U \frac{(c+v)^2}{(c-v)^2}$$

Sea ahora Ω la superficie del espejo. Si estuviere en reposo, recibiría por unidad de tiempo una cantidad de energía incidente igual a $\Omega c U$, pero como se mueve con la velocidad v al encuentro de esa energía, recibe la cantidad

$$W_1 = \Omega (c+v) U$$

En forma de energía reflejada entrega la cantidad

$$W_2 = \Omega (c-v) U' = \Omega \frac{(c+v)^2}{c-v} U$$

Esta cantidad entregada es mayor que la recibida, y su diferencia debe ser la medida de algún trabajo que se haya realizado al mover el espejo, para lo cual éste debe encontrar la resistencia de una fuerza. Esa fuerza será la presión p que la radiación ejerce sobre el espejo multiplicada por Ω , y el trabajo correspondiente valdrá $p \Omega v$. Luego:

$$p \Omega v = W_2 - W_1 = \Omega U \left[\frac{(c+v)^2}{c-v} - (c+v) \right]$$

(*) La relación (5) es aplicable con el mismo valor de A , porque las radiaciones reflejada e incidente tienen la misma amplitud.

$$= \Omega U \frac{2cv + 2v^2}{c - v}$$

de donde sale

$$p = 2U \frac{c + v}{c - v}$$

Si el espejo está en reposo v vale cero y entonces:

$$p = 2U \quad (7)$$

Esta fórmula importante dice que la presión que una radiación ejerce sobre un espejo perfecto, cuando incide sobre él normalmente, es igual al doble de la densidad de radiación. En la deducción se ha supuesto que la radiación era monocromática; si la radiación es compleja, la fórmula es la misma, pero entonces U sería la densidad de la radiación compleja, que es la suma de las densidades de las radiaciones componentes.

Cuando el espejo está en reposo, la radiación reflejada tiene la misma densidad que la radiación incidente. La presión p se debe entonces por iguales partes a ambas radiaciones. Entonces, si en lugar de un espejo perfecto se tiene una superficie perfectamente absorbente, la radiación que sobre ella incidiese normalmente ejercería una presión

$$p = U \quad (7 \text{ bis})$$

pues faltaría la radiación reflejada.

Probemos ahora que estos resultados son exactos, porque a ellos mismos se llega sobre la base de la teoría electromagnética, que no necesita hacer uso de la fórmula (5) que, como se ha repetido, es válida sólo para medios ponderables.

Se dijo (§ 1) que en esta teoría, la luz se debe a la coexistencia de dos campos, uno eléctrico y otro magnético cuyas intensidades varían con el tiempo según una ley sinusoidal, y que se propagan según el rayo luminoso con la velocidad c de la luz.

Consideremos el campo eléctrico. Ahora en la *fig. 7*, en la abscisa x del haz de rayos de sección Ω , en lugar del desplazamiento del éter caracterizado por la elongación s , hay allí un campo eléctrico cuya intensidad h vale:

$$h = h_0 \text{ sen } 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

en donde h_0 es la intensidad máxima de dicho campo. Pero un campo eléctrico significa que hay energía distribuída en el espacio en que se desarrolla el campo, energía cuya densidad u vale

$$u = \frac{k h^2}{8\pi}$$

fórmula en que k designa la constante dieléctrica del medio. Entonces, entre las secciones aa' y bb' , la energía contenida es:

$$\begin{aligned} dW &= u \Omega dx = \frac{k h_o^2}{8 \pi} \Omega dx \\ &= \frac{k h_o^2 \Omega}{8 \pi} \left[\operatorname{sen} 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]^2 dx \end{aligned}$$

y la contenida entre AA' y BB' será por tanto:

$$\begin{aligned} W &= \frac{k h_o^2 \Omega}{8 \pi} \int_{x_1}^{x_1 + \lambda} \left[\operatorname{sen} 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]^2 dx \\ &= \frac{k h_o^2 \Omega \lambda}{16 \pi} \end{aligned}$$

Pero $\Omega \lambda$ es el volumen comprendido entre AA' y BB' . Luego la densidad de la energía transportada por el campo eléctrico vale:

$$U_e = \frac{W}{\Omega \lambda} = \frac{k h_o^2}{16 \pi}$$

Para el campo magnético se encontrará análogamente:

$$U_m = \frac{\mu H_o^2}{16 \pi}$$

en donde μ es la permeabilidad magnética del medio, y H_o es la intensidad máxima del campo magnético. La densidad total U de la radiación vale entonces:

$$U = U_e + U_m = \frac{1}{16 \pi} \left(k h_o^2 + \mu H_o^2 \right)$$

Pero en la teoría electromagnética se demuestra que:

$$k h_o^2 = \mu H_o^2$$

de donde resulta

$$U_e = U_m$$

lo que indica que la energía de la radiación es transportada por partes iguales por los campos eléctrico y magnético que constituyen dicha radiación. Luego se puede escribir:

$$U = 2U_o = \frac{k h_o^2}{8 \pi}$$

Cuando la radiación se refleja en el espejo, la densidad U' de la radiación reflejada valdrá:

$$U' = \frac{k h_o'^2}{8 \pi}$$

en donde h_o' es la intensidad del campo eléctrico reflejado. Ahora, como el espejo es perfectamente reflejante, todas las líneas de fuerza del campo incidente vuelven, por reflexión, a constituir el campo reflejado, de donde se deduce, considerando la unidad de tiempo, que el mismo número de líneas del campo incidente que se repartían en un largo $(c + v)$ del rayo incidente se reparten, después de la reflexión, en un largo $(c - v)$ del rayo reflejado. De aquí, recordando que la densidad de las líneas de un campo es una medida de su intensidad, resulta:

$$\frac{h_o'}{h_o} = \frac{c + v}{c - v} \text{ y sucesivamente:}$$

$$h_o'^2 = \frac{(c + v)^2}{(c - v)^2} h_o^2$$

$$U' = \frac{(c + v)^2}{(c - v)^2} U$$

que es la misma fórmula de pág. 53, deducida sobre la base del éter cósmico ponderable. Luego las fórmulas (7) y (7 bis) son rigurosamente exactas.

§ 9. PRESIÓN DE RADIACIÓN CUANDO LA INCIDENCIA ES OBLÍCUA

Si la radiación incide oblicuamente, formando los rayos un ángulo α con la normal (fig. 9), la relación entre las intensidades h_o' y h_o de los campos eléctricos incidente y reflejado será:

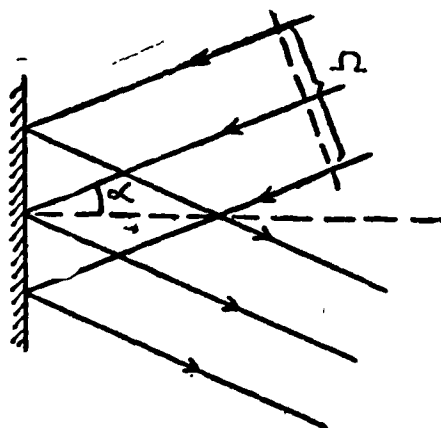
$$\frac{h_o'}{h_o} = \frac{c + v \cos \alpha}{c - v \cos \alpha}$$

de donde:

$$h_o'^2 = \frac{(c + v \cos \alpha)^2}{(c - v \cos \alpha)^2} h_o^2$$

y por tanto las densidades de las radiaciones guardarán la relación:

$$U' = \frac{(c + v \cos \alpha)^2}{(c - v \cos \alpha)^2} U$$

FIG. 9.

La energía recibida por el espejo por unidad de tiempo será:

$$W_1 = \Omega (c + v \cos \alpha) U$$

la energía devuelta al espacio por reflexión será:

$$W_2 = \Omega (c - v \cos \alpha) U' = \Omega \frac{(c + v \cos \alpha)^2}{c - v \cos \alpha} U$$

La diferencia corresponde al trabajo $p \frac{\Omega}{\cos \alpha} v$ de la presión de radiación. Luego se tiene como balance de la energía

$$\begin{aligned} p \frac{\Omega}{\cos \alpha} v &= W_2 - W_1 = \Omega U \left[\frac{(c + v \cos \alpha)^2}{c - v \cos \alpha} - (c + v \cos \alpha) \right] \\ &= \Omega U \frac{2 c v \cos \alpha + 2 v^2 \cos^2 \alpha}{c - v \cos \alpha} \end{aligned}$$

de donde sale

$$p = 2 U \frac{c + v \cos \alpha}{c - v \cos \alpha} \cos^2 \alpha$$

Si el espejo está inmóvil, v vale cero, con lo cual

$$p = 2 U \cos^2 \alpha$$

(7 ter)

§ 10. PRESIÓN DE LA RADIACIÓN SOLAR

Según lo anterior, la radiación del sol debe ejercer sobre la tierra una presión. Esta presión puede calcularse partiendo del resultado de las medidas que dicen que sobre una superficie de 1 cm.^2 colocada en la tierra normalmente a los rayos solares, con el sol en el cenit, llegan $1,92$ caloríasgramos por minuto (*constante solar*). Como esta cantidad de energía radiante debe estar contenida en un cilindro de base 1 y de altura igual a $60 c$, la densidad U de la radiación solar que llega a la tierra vale en unidades C.G.S.

$$U = \frac{1,92 \times 4,187 \times 10^7}{60 \times 3 \times 10^{10}} = 0,446 \times 10^{-4} \text{ ergs/cm}^3$$

Si se admite que la superficie de la tierra es perfectamente absorbente, este mismo valor será el de la presión, medida en dinas por centímetro cuadrado (barias)

Luego

$$\begin{aligned} p &= 0,446 \times 10^{-4} \text{ dinas/cm.}^2 \\ &= 0,455 \times 10^{-4} \text{ miligramos/cm.}^2 \end{aligned}$$

Como se ve, esta presión es extraordinariamente pequeña; sobre una hectárea de terreno valdría $4,55$ gramos.

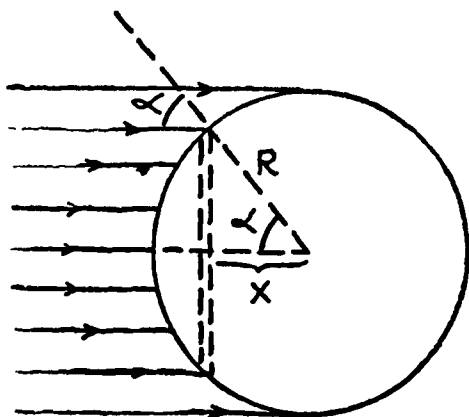


FIG. 10.

Si se quiere calcular la presión total que el sol ejerce sobre la tierra, habría que proceder a integrar esta presión por zonas de alturas dx infinitamente pequeñas. Dada la enorme distancia a que está el sol, admitiremos que los rayos solares llegan paralelos a la tierra (fig. 10). Consideremos entonces la zona proyectada en la figura: sobre ella la radiación llega bajo una incidencia α y produce una presión normal,

o sea dirigida según el radio de la tierra, de modo que la resultante, que tendrá la dirección de los rayos solares valdrá:

$$dp = 2 \pi R dx U \cos^3 \alpha$$

y la acción total sobre la tierra será:

$$p = 2 \pi R U \int_0^R \cos^3 \alpha dx$$

Pero entre las variables hay la relación

$$x = R \cos \alpha$$

$$dx = -R \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

Con esto

$$\begin{aligned} p &= 2 \pi R^2 U \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \pi R^2 U \left[\cos^4 \alpha \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= \frac{1}{2} \pi R^2 U \end{aligned}$$

Tomando para el radio de la tierra el valor

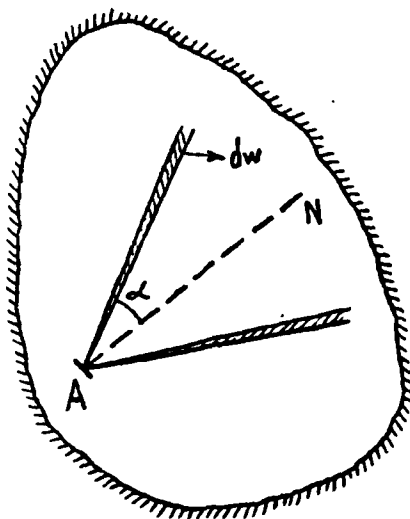
$$R = 6,37 \times 10^8 \text{ cms.}$$

resulta $p = 30,000$ toneladas, en números redondos.

Esta fuerza con que el sol repele por radiación a la tierra es insignificante comparada con la fuerza gravitacional con que la atrae (esta última es aproximadamente 10^{14} veces mayor). Pero si en vez de la tierra se consideran cuerpos esféricos cada vez más pequeños, como la repulsión decrece con el cuadrado del radio de la esfera, y la atracción lo hace con el cubo, o sea más rápidamente (puesto que esa atracción es proporcional a la masa del cuerpo atraído y por consiguiente a su volumen), la diferencia entre ambas fuerzas contrarias se va haciendo menor, y para corpúsculos muy pequeños, puede la repulsión debida a la radiación superar a la acción gravitacional. Es lo que ocurre con las partículas extraordinariamente pequeñas que constituyen la cola de los cometas, lo que explica que esta cola aparezca siempre orientada en dirección opuesta al sol.

§ 11. PRESIÓN DE RADIACIÓN EN EL INTERIOR DE UNA CAVIDAD

Determinemos ahora la presión que ejerce la radiación contenida en un recinto cerrado de paredes perfectamente reflejantes, que se mantiene a temperatura constante. Para cualquier calidad λ de radiación contenida en el recinto, vale el hecho

FIG. II.

de que esta radiación, después de múltiples reflexiones en las paredes, debe haberse distribuido uniformemente en todo el volumen del recinto. Ubiquemos entonces en un punto cualquiera A del interior, un espejo perfecto infinitamente pequeño. La radiación de calidad λ incidirá sobre este espejo bajo todas las incidencias comprendidas entre 0 y $\frac{\pi}{2}$; en particular, la que llega con la incidencia cualquiera α estará contenida dentro del cono anular elemental de ángulo sólido

$$dw = 2\pi \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

Cómo los rayos de calidad λ existentes en el recinto tienen todas las direcciones posibles, si se trazan por A rayos paralelos a todas esas direcciones, esos rayos quedarán uniformemente distribuidos en el espacio alrededor de A , o sea en el ángulo sólido total 4π . El número total de esos rayos es evidentemente proporcional a la densidad U_λ de la radiación considerada, en tanto que el número de esos rayos que va por el interior del cono anular elemental dw será proporcional a la densidad u_α de la energía de calidad λ que cae sobre el espejo con la incidencia α . Entonces será evidente la proporción:

$$\frac{u_\alpha}{U_\lambda} = \frac{dw}{4\pi} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

de donde

$$u_\alpha = \frac{1}{2} U_\lambda \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha$$

La presión dp_λ producida sobre el espejo por esos rayos inclinados del ángulo α valdrá según (7 ter):

$$dp_\lambda = 2 u_\alpha \cos^2 \alpha = U_\lambda \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha$$

y la presión total será:

$$p_\lambda = U_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\alpha = U_\lambda \left[-\frac{\cos^3 \alpha}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{3} U_\lambda$$

La presión p de la radiación integral contenida en el recinto valdrá en seguida

$$p = \sum p_\lambda = \frac{1}{3} \sum U_\lambda$$

o sea

$$p = \frac{1}{3} U \quad (8)$$

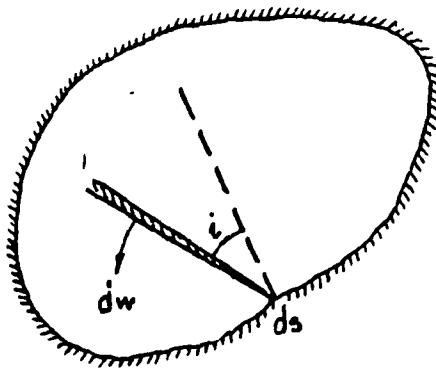
porque es evidente que la densidad de la radiación integral es la suma de las densidades de las radiaciones monocromáticas constitutivas de ella, pues el volumen para todas es el mismo.

Como este resultado es independiente de la posición del espejo elemental considerado, valdrá también si este espejo se confunde con la pared interior del recinto. Pero como la naturaleza de la pared de un recinto cerrado, según la teoría de los intercambios, no influye sobre la calidad de la radiación integral contenida en el recinto ni sobre sus propiedades, el resultado seguirá siendo el mismo sin necesidad de suponer paredes reflejantes. Luego, la fórmula (8) expresa que la radiación integral contenida en una cavidad cerrada ejerce sobre sus paredes una presión que es igual a la tercera parte de la densidad de la radiación.

§ 12. RELACIÓN ENTRE LA DENSIDAD DE RADIACIÓN Y EL PODER EMISIVO

Consideremos (fig. 12) un elemento superficial ds de la pared de una cavidad. La cantidad de energía de calidad λ , emitida por segundo de tiempo por ese elemento, dentro del cono de ángulo sólido $d\omega$ inclinado del ángulo i respecto de la normal vale según (2 bis).

$$(d^5 W)_\lambda = e_\lambda d\lambda ds \cos i d\omega$$

FIG.12.

Pero es evidente que esa misma energía puede avaluarse en función de la densidad (§ 11).

$$u_i = U_\lambda \frac{dw}{4\pi}$$

y la velocidad c de propagación de la radiación:

$$\left(d^s W_i \right)_\lambda = U_\lambda \frac{dw}{4\pi} c ds \cos i$$

pues esa energía que llega a ds está contenida en un cilindro de sección transversal $ds \cos i$ y de altura c . Igualando las dos expresiones:

$$U_\lambda \frac{dw}{4\pi} c ds \cos i = e_\lambda d\lambda ds \cos i dw$$

resulta:

$$c U_\lambda = 4\pi e_\lambda d\lambda$$

Integrando para todas las calidades de radiación contenidas en la cavidad se tendrá:

$$c \int U_\lambda = 4\pi \int e_\lambda d\lambda$$

Pero

$$\int U_\lambda = U$$

y

$$\pi \int e_\lambda d\lambda = \pi i = E$$

de donde resulta:

$$U = \frac{4 E}{c} = \frac{4 \pi i}{c} \quad (9)$$

conjuntamente con

$$U_{\lambda} = \frac{4 E_{\lambda}}{c} = \frac{4 \pi i_{\lambda}}{c} \quad (9 \text{ bis})$$

En estas fórmulas tanto U como E e i no dependen sino de la temperatura T del recinto.

§ 13. LEY DE STEFAN

Supongamos un cilindro de sección transversal S (fig. 13) en el cual puede moverse un émbolo A ; sea x el largo de la cavidad C del cilindro en un momento

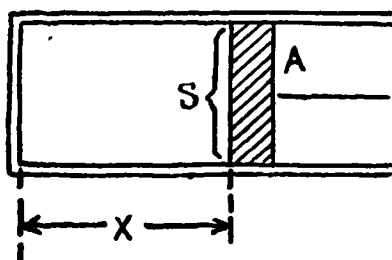


FIG. 13.

dado; supondremos las paredes interiores del cilindro y del émbolo perfectamente reflejantes. La energía radiante contenida en el cilindro valdrá entonces:

$$W = S x U$$

siendo U la densidad de la energía. Esta densidad será sólo función de la temperatura:

$$U = \varphi(T)$$

Si se entrega a la cavidad una cantidad de calor dQ (medida en unidades de energía), y se mueve el émbolo de la cantidad dx , la energía dQ se gastará en parte en aumentar la energía radiante contenida en la cavidad, y en parte en realizar el trabajo que significa mover el émbolo, venciendo la resistencia de la presión. Se tendrá entonces:

$$dQ = dW + Spdx$$

y como

$$p = \frac{1}{3} U$$

$$\begin{aligned}
 dQ &= d(SxU) + \frac{1}{3}SUdx \\
 &= SUdx + SxdU + \frac{1}{3}SUdx \\
 &= SxdU + \frac{4}{3}SUdx
 \end{aligned}$$

o bien introduciendo la temperatura T

$$dQ = Sx\varphi'(T)dT + \frac{4}{3}S\varphi(T)dx$$

La diferencial $d\Phi$ de la entropía valdrá entonces:

$$d\Phi = \frac{dQ}{T} = S \left[\frac{x\varphi'(T)dT}{T} + \frac{4}{3} \frac{\varphi(T)dx}{T} \right]$$

El segundo miembro debe ser la diferencial exacta de una función F de T y x . Luego se debe verificar que:

$$\frac{\delta F}{\delta T} = \frac{x\varphi'(T)}{T} \text{ conjuntamente con } \frac{\delta F}{\delta x} = \frac{4}{3} \frac{\varphi(T)}{T}$$

Derivando la primera de estas ecuaciones respecto de x resulta:

$$\frac{\delta^2 F}{\delta T \delta x} = \frac{\varphi'(T)}{T}$$

y derivando la segunda respecto de T

$$\frac{\delta^2 F}{\delta x \delta T} = \frac{4}{3} \frac{T\varphi'(T) - \varphi(T)}{T^2}$$

Igualando los dos valores:

φ

$$\frac{\varphi'(T)}{T} = \frac{4}{3} \frac{\varphi'(T)}{T} - \frac{4}{3} \frac{\varphi(T)}{T^2}$$

de donde:

$$\frac{\varphi'(T)}{\varphi(T)} = \frac{4}{T}$$

Multipliquemos ambos miembros por $d T$. Queda:

$$\frac{\varphi'(T) d T}{\varphi(T)} = 4 \frac{d T}{T}$$

ecuación que se puede integrar:

$$\text{Log } \varphi(T) = 4 \text{ Log } T + \text{Log } A$$

o sea:

$$\varphi(T) = A T^4$$

Luego:

$$U = A T^4$$

Por tanto, el poder emisor valdrá según (9)

$$E = \frac{c U}{4} = \frac{C A}{4} T^4$$

que escribiremos:

$$E = \sigma T^4 \quad (10)$$

en donde σ es una constante:

Esta ley, una de las más importantes de la teoría de las radiaciones, dice que el poder emisor de un cuerpo es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Ella fué descubierta experimentalmente por Stefan y teóricamente por Boltzmann. En unidades C.G.S. la constante A vale, según las medidas más exactas:

$$A = 7,65 \times 10^{-15} \text{ erg cm.}^{-3}$$

de donde:

$$\sigma = 5,74 \times 10^{-5} \text{ erg cm.}^{-2} \text{ seg}^{-1}$$

Según estas cifras, un cuerpo negro calentado a la temperatura de 1000 grados absolutos, emite, por centímetro cuadrado y segundo de tiempo

$$5,74 \times 10^7 \text{ ergs} = 5,74 \text{ joules} = 1,37 \text{ calorías gramo}$$

La densidad de la energía radiante contenida en un recinto cerrado a esa temperatura valdría $7,65 \times 10^{-3} \text{ ergs por centímetro cúbico}$ y ejercería sobre las paredes una presión de $2,55 \times 10^{-3} \text{ dinas por centímetro cuadrado (barias)}$, que es como se ve del orden de las mil millonésimas partes de una atmósfera.

§ 14. TEMPERATURA DEL SOL

Con la ley de Stefan. y en la suposición de que el sol es un cuerpo negro y emite por lo tanto la radiación integral, se puede calcular la temperatura del sol partiendo del conocimiento de la cantidad de energía solar que llega a la tierra. Se ha dicho más atrás que las medidas han dado para esta constante solar el valor:

$B = 1,92$ calorías gramo/minuto y centímetro cuadrado

$$\frac{1,92 \times 4,187 \times 10^7}{60} = 1,34 \times 10^6 \text{ ergs/cm.}^2 \text{ y seg.}$$

Sea entonces (fig. 11) O el centro del sol, R su radio, y $d\sigma'$ una superficie infinitamente pequeña, colocada en la tierra, a la distancia D del sol.

La energía radiante solar que llega a $d\sigma'$ proviene del casquete esférico solar (casi un hemisferio) que recorta sobre la superficie del sol un cono cuyo vértice estuviese en $d\sigma'$ y cuyas generatrices fuesen tangentes a la superficie solar. De este casquete parte la energía radiante hacia $d\sigma'$ con diferentes inclinaciones i respecto

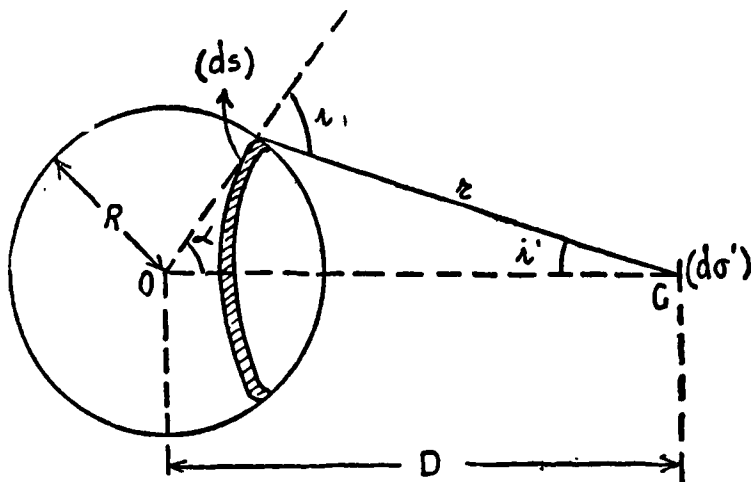


FIG. 14.

de la normal a la superficie del sol. Entonces, si se considera una zona cuyas bases sean normales a OC , la energía que parte de esa zona hacia $d\sigma'$ lo hace bajo el mismo ángulo i' , de modo que su valor, para la calidad λ , sería según (1 bis)

$$\left(d^4 W_t\right)_\lambda = e_\lambda d\lambda \frac{\cos i \cos i' ds d\sigma'}{r^2}$$

La superficie ds de la zona esférica vale:

$$ds = 2\pi R^2 \sin \alpha d\alpha$$

Se tiene además:

$$\cos i = \frac{D \cos \alpha - R}{r}$$

$$\cos i' = \frac{D - R \cos \alpha}{r}$$

$$r^2 = D^2 + R^2 - 2 D R \cos \alpha$$

Reemplazando:

$$\left(d^4 W_i \right)_\lambda = e_\lambda d\lambda \frac{(D \cos \alpha - R)(D - R \cos \alpha) 2 \pi R^2 \sin \alpha d\alpha}{(D^2 + R^2 - 2 D R \cos \alpha)^2} d\sigma'$$

Integrando para todas las zonas que componen el casquete solar visible desde la tierra, se tendría

$$\left(d^4 W \right)_\lambda = 2 \pi R^2 d\sigma' e_\lambda d\lambda \int_0^{\alpha_1} \frac{(D \cos \alpha - R)(D - R \cos \alpha) \sin \alpha d\alpha}{(D^2 + R^2 - 2 D R \cos \alpha)^2}$$

en donde el límite superior α_1 queda definido por

$$\cos \alpha_1 = \frac{R}{D}$$

Para hacer la integral se cambia de variable, poniendo

$$y = \cos \alpha$$

$$dy = -\sin \alpha d\alpha$$

Con esto

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_1} &= - \int_1^{\frac{R}{D}} \frac{(Dy - R)(D - Ry) dy}{(D^2 + R^2 - 2 D R y)^2} \\ &= \frac{1}{4 D R} \int_1^{\frac{R}{D}} \left[1 - \frac{(D^2 - R^2)^2}{(D^2 + R^2 - 2 D R y)^2} \right] dy \\ &= \frac{1}{4 D R} \left[y - \frac{(D^2 - R^2)^2}{2 D R (D^2 + R^2 - 2 D R y)} \right]_1^{\frac{R}{D}} \end{aligned}$$

En el límite superior esta integral vale

$$\frac{3 R^2 - D^2}{8 D^2 R^2}$$

En el límite inferior vale

$$-\frac{D^2 + R^2}{8 D^2 R^2}$$

Por lo tanto la integral definida vale $\frac{1}{2D^2}$ con lo cual

$$\left(d^3 W \right)_{\lambda} = \pi \frac{R^2}{D^2} d\sigma' e_{\lambda} d\lambda$$

Integrando para toda la radiación solar y aprovechando (4)

$$d^2 W = \frac{\pi R^2}{D^2} d\sigma' \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda = E \frac{R^2}{D^2} d\sigma' \quad (*)$$

Pero $\frac{d^2 W}{d\sigma'}$ es la constante solar. Luego

$$B = \frac{E R^2}{D^2}$$

de donde

$$E = B \cdot \frac{D^2}{R^2}$$

y como según la ley de Stefan

$$E = \sigma T^4$$

igualando los dos valores de E y despejando T se encuentra para la temperatura absoluta del sol el valor

$$T = \sqrt[4]{\frac{B D^2}{\sigma R^2}}$$

Con los valores numéricos, en unidades CGS

$$B = 1,34 \times 10^6$$

$$R = 0,695 \times 10^{11}$$

$$D = 1,49 \times 10^{13}$$

$$\sigma = 5,74 \times 10^{-5}$$

resulta

$$T = 5570 \text{ grados absolutos}$$

$$= 5300 \text{ grados centígrados en números redondos.}$$

Otras fórmulas de esta teoría de las radiaciones van a permitir también calcular la temperatura del sol; se obtendrán cifras más o menos concordantes con la anterior.

(*) Es interesante observar que este resultado muestra que para la radiación emitida, el sol se comporta como un punto irradiante ubicado en su centro.

§ 15 EXPANSIÓN ADIABÁTICA DE UN RECINTO QUE CONTIENE RADIACIÓN

Resolveremos el siguiente problema (*fig. 15*). Un espejo E se encuentra a la distancia r_0 de otro espejo paralelo E_0 . Una radiación de calidad λ se mueve normalmente entre ambos espejos. Mientras el espejo E permanece inmóvil como E_0 , la reflexión en ambos espejos no produce modificación alguna en la radiación que se moverá entre los espejos conservando invariable su largo de onda. Pero, en seguida, supondremos que el espejo E se mueve, alejándose de E_0 , o sea, modificando su distancia r_0 a él. Ahora, la radiación verificará reflexiones sobre el espejo fijo E_0 que no alteran la calidad de la radiación, pero, alternativamente, verifica también

FIG. 15 a.

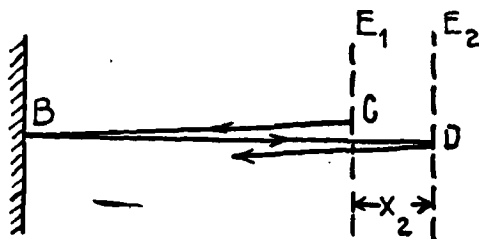
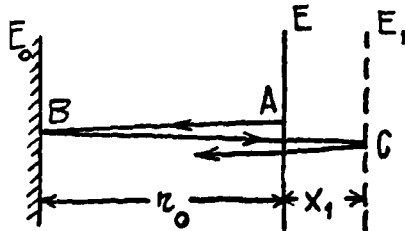


FIG. 15 b.

reflexiones sobre el espejo móvil E , las cuales reflexiones, según se ha visto, (§ 6) modifican su largo de onda. La fórmula (6) de dicho § se aplicará en este caso con inversión del segundo miembro, porque ahora las reflexiones se verifican sobre un espejo que va huyendo de la radiación incidente.

Sea v la velocidad con que se mueve el espejo E , y tomemos como origen del tiempo el momento en que E se pone en movimiento; en un momento infinitamente próximo anterior ha partido de E (del punto A en la *fig. 15 a*, en donde para claridad, se han dibujado los rayos incidentes y reflejados un poco separados, cuando en realidad se confunden) la radiación λ , la cual se refleja en B sobre el espejo fijo, sin modificar su calidad. Pero al alcanzar en C al espejo E , que en el intervalo se ha movido hasta la posición E_1 , hace una primera reflexión con cambio de largo de onda. Esto ocurre en el instante t_1 , definido por la ecuación evidente

$$ct_1 = 2r_0 + vt_1$$

de donde sale

$$t_1 = \frac{2 r_o}{c-v}$$

y cuando el espejo móvil está en E_1 a la distancia x_1 dada por

$$x_1 = v t_1 = \frac{2 r_o v}{c-v}$$

La segunda reflexión con cambio de largo de onda ocurrirá en D , (fig. 15 b), en el instante t_2 definido por

$$c t_2 = 2 (r_o + x_1) + v t_2$$

de donde sale

$$t_2 = 2 \frac{r_o + x_1}{c-v} = \frac{2 r_o}{c-v} \left(\frac{c+v}{c-v} \right)$$

y encontrará al espejo móvil en E_2 , desplazado de una nueva cantidad

$$x_2 = v t_2 = \frac{2 r_o v}{c-v} \left(\frac{c+v}{c-v} \right)$$

Del mismo modo, puede verse que la tercera reflexión con cambio de largo de onda ocurrirá cuando el espejo móvil se haya desplazado de la nueva cantidad

$$x_3 = \frac{2 r_o v}{c-v} \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^2$$

Entonces, al cabo de n reflexiones con cambio de largo de onda, el espejo móvil se habrá desplazado de una cantidad total

$$\begin{aligned} d &= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ &= \frac{2 r_o v}{c-v} \left[1 + \left(\frac{c+v}{c-v} \right) + \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^2 + \dots + \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^{n-1} \right] \\ &= \frac{2 r_o v}{c-v} \frac{\left(\frac{c+v}{c-v} \right)^n - 1}{\frac{c+v}{c-v} - 1} = r_o \left[\left(\frac{c+v}{c-v} \right)^n - 1 \right] \end{aligned}$$

Entonces, la distancia r_1 a que se encontrarán los espejos al cabo de la reflexión número n valdrá

$$r_1 = r_0 + d = r_0 \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^n$$

de donde

$$\frac{r_1}{r_0} = \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^n$$

Ahora, cada reflexión aumenta el largo de onda anterior en la proporción $\left(\frac{c+v}{v-c} \right)$ (§ 6, fórmula 6). Luego el largo de onda que habrá adquirido la radiación al cabo de las n reflexiones, sobre el espejo móvil, o sea cuando la distancia entre los espejos ha alcanzado el valor r_1 guardará con el primitivo largo de onda la relación

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \left(\frac{c+v}{c-v} \right)^n$$

Combinando estas dos últimas igualdades sale la relación importante

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{r_1}{r_0}$$

que se puede escribir

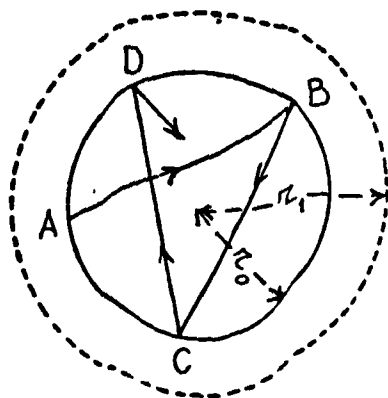
$$\frac{\lambda_1}{r_1} = \frac{\lambda_0}{r_0} = D \quad (11)$$

en donde D es constante

Apliquemos este resultado a una esfera hueca de radio r_0 , de paredes impermeables al calor y perfectamente reflejantes, y que a la temperatura T_0 contiene la radiación integral correspondiente. Consideremos una radiación monocromática λ_0 cualquiera constitutiva de esa radiación integral; esta radiación está moviéndose según un camino como el indicado en la figura 16 ($ABC \dots$). Si la esfera se expande, creciendo su radio a un nuevo valor r_1 , cada una de las cuerdas AB , BC , CD , recorridas por la radiación, incrementan sus largos también en la proporción $\frac{r_1}{r_0}$, lo que, según el resultado involucrado en la ecuación (11) conduce a que la radiación de largo de onda λ_0 se transforme por la expansión de la esfera en una radiación de largo de onda λ_1 , que valdrá

$$\lambda_1 = \frac{r_1}{r_0} \lambda_0$$

Lo propio ocurrirá con todas las demás radiaciones, monocromáticas constitutivas de la radiación integral que contenía la esfera en su primitiva dimensión r_0 : todas se transforman en radiaciones de otros largos de onda. Quiere decir esto que

FIG. 16.

la esfera expandida a su nuevo radio r_1 , contiene una radiación total distinta de la que contenía la esfera cuando su radio era r_0 , y como las paredes se han supuesto impermeables, esta nueva radiación total debe ser también radiación integral. Pero como es distinta de la anterior, esto exige que la temperatura haya variado.

Fenómenos semejantes, ocurrirán si en vez de crecer el radio de la esfera, él disminuye, o sea cuando en vez de una expansión de la radiación integral, se verifica una compresión. En ambos cambios (expansión o compresión), las paredes impermeables del recinto no han permitido intercambios de energía (calor) con el exterior, o sea que se ha tratado de una *transformación adiabática de la radiación*.

Lo anterior establece entonces que cuando la radiación integral experimenta una transformación adiabática, se modifican los largos de onda de las radiaciones monocromáticas componentes, y la temperatura.

§ 16. LEYES DE LOS DESPLAZAMIENTOS

La expresión analítica de estos cambios, da lugar a la formulación de dos leyes llamadas de desplazamiento: la ley de desplazamiento «largo de onda-temperatura» y la ley de desplazamiento «largo de onda-energía».

Para deducir la primera, consideremos una esfera hueca de radio r , de paredes impermeables y perfectamente reflejantes, que contiene radiación integral a la temperatura absoluta T , y que verifica una expansión adiabática infinitamente pequeña, al cambiarse su radio r en $(r + dr)$. Sea U la densidad de la radiación. La energía contenida en la esfera vale entonces

$$W = \frac{4}{3} \pi r^3 U$$

Sabemos también que la presión que esta radiación ejerce sobre las paredes vale

$$p = \frac{1}{3} U$$

Cuando la esfera se expande, la energía W varía de la cantidad

$$dW = \frac{4}{3} \pi r^3 dU + 4 \pi r^2 U dr$$

Al mismo tiempo, la presión p ejercitada sobre la superficie $4 \pi r^2$ de la esfera, realiza un trabajo

$$d\tau = 4 \pi r^2 p dr = \frac{4}{3} \pi r^2 U dr$$

Como la transformación es diabática, debe verificarse que

$$dW + d\tau = 0$$

o sea

$$\frac{4}{3} \pi r^3 dU + 4 \pi r^2 U dr + \frac{4}{3} \pi r^2 U dr = 0$$

ecuación que se puede simplificar hasta la forma

$$r dU + 4 U dr = 0$$

Dividiendo por rU :

$$\frac{dU}{U} + 4 \frac{dr}{r} = 0$$

ecuación que integrada da

$$\text{Log } U + 4 \text{ Log } r = \text{Log } \eta$$

o sea

$$U r^4 = \eta \quad (12)$$

en donde η es una constante. Esta ecuación expresa que cuando una esfera se expande adiabáticamente, la densidad de la radiación disminuye con la cuarta potencia del radio.

Apliquemos lo anterior a una determinada radiación λ , lo que es posible, porque a las mismas fórmulas se llegaría si se admitiese que una cavidad cerrada contuviese a la temperatura T una sola radiación.

Se tendría

$$U_{\lambda} r^4 = \eta_{\lambda} \quad (12 \text{ bis})$$

y la ley de Stefan daría

$$U_{\lambda} = A_{\lambda} T^4$$

Reemplazando:

$$A_{\lambda} r^4 T^4 = \eta_{\lambda}$$

Por último, según (II)

$$\frac{\lambda}{r} = D_{\lambda}$$

de donde

$$r = \frac{\lambda}{D_{\lambda}}$$

lo que reemplazado más arriba conduce a

$$\frac{A_{\lambda}}{D_{\lambda}^4} \lambda^4 T^4 = \eta_{\lambda}$$

y reuniendo todas las constantes en el segundo miembro:

$$\lambda T = \sqrt[4]{\frac{D_{\lambda}^4 \eta_{\lambda}}{A_{\lambda}}} = C_{\lambda} \quad (13)$$

en donde C_{λ} es una nueva constante característica de la radiación λ ,

Esta ley de desplazamiento dice que si en la radiación integral correspondiente a una temperatura T_1 , cambia por una transformación adiabática esta temperatura al valor T_2 , entonces, una radiación de largo de onda λ_1 , contenida en la radiación a T_1 , corresponde, se desplaza o es sustituida por otra radiación de largo de onda λ_2 tal que

$$\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2$$

Por ejemplo, si la radiación integral existente en una cavidad o producida por el cuerpo negro a la temperatura absoluta $T_1 = 3000^{\circ}$ absolutos contuviese la radiación amarilla de largo de onda $\lambda_1 = 0,000055$ cms., y por la expansión adiabática la cavidad o el cuerpo negro se enfriasen hasta $T_2 = 2000^{\circ}$, esa radiación amarilla sería sustituida por una radiación de largo de onda

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 T_1}{T_2} = 0,000082 \text{ cms.}$$

que se ve que sería invisible (radiación infrarroja).

La segunda ley de desplazamiento expresa que también la energía asociada a un largo de onda particular λ cambia al verificarse una transformación adiabática

de la radiación. Para expresar este cambio, supongamos que la esfera de radio r se llene solo con radiación de calidad λ . Como hay infinitas calidades λ , la densidad U_λ debe ser infinitamente pequeña, de modo que en realidad debería hablarse de densidad de una radiación comprendida entre los largos de onda λ y $(\lambda + d\lambda)$, y completar la ecuación de § 7 en la forma

$$U = \sum_0^\infty U_\lambda = \int_0^\infty u d\lambda$$

La ecuación (12 bis) correctamente escrita sería entonces

$$u_\lambda d\lambda r^4 = \eta_\lambda \quad (12 \text{ ter})$$

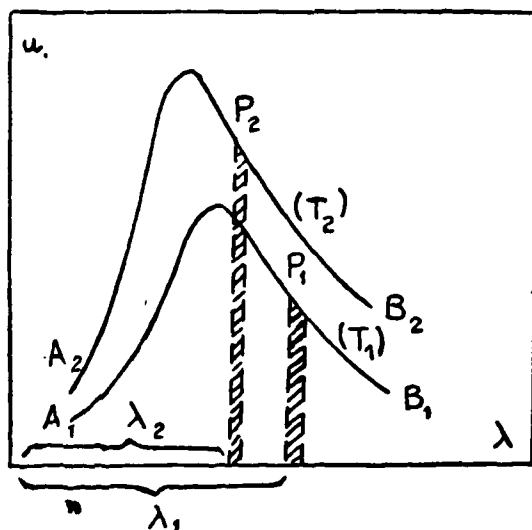


FIG. 17.

Entonces, supongamos que $A_1 P_1 B_1$ fuese la curva representativa de la variación de la densidad u_{λ_1} con λ_1 , para la temperatura T_1 , cuando la esfera tiene el radio r_1 , y $A_2 P_2 B_2$ la curva para la temperatura T_2 que adquiere la esfera cuando su radio varía al valor r_2 , siendo la transformación adiabática.

Si λ_1 y λ_2 son dos longitudes de onda correspondientes al desplazamiento «largo de onda-temperatura» se verificará

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_2}{T_1}$$

También se verifica que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

y por último

$$u_{\lambda_1} d\lambda_1 r_1^4 = u_{\lambda_2} d\lambda_2 r_2^4$$

De la segunda de estas ecuaciones sale, diferenciando

$$d\lambda_2 = \frac{r_2}{r_1} d\lambda_1 = \frac{T_1}{T_2} d\lambda_1$$

Reemplazando en la tercera

$$u_{\lambda_1} r_1^4 = u_{\lambda_2} \frac{T_1}{T_2} r_2^4$$

$$\frac{u_{\lambda_1}}{u_{\lambda_2}} = \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^4 = \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^4 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^5$$

o sea

$$\frac{u_{\lambda_1}}{T_1^5} = \frac{u_{\lambda_2}}{T_2^5}$$

lo que se puede escribir en general

$$\frac{u_{\lambda}}{T^5} = F_{\lambda}$$

en donde F_{λ} es una constante. Pero según (9 bis, § 10)

$$U_{\lambda} = \frac{4 \pi i \lambda}{c}$$

o sea

$$u_{\lambda} d\lambda = \frac{4 \pi}{c} e_{\lambda} d\lambda$$

de donde

$$u_{\lambda} = \frac{4 \pi}{c} e_{\lambda}$$

valor que reemplazado en la ecuación anterior da:

$$\frac{e_{\lambda}}{T^5} = \frac{c}{4 \pi} F_{\lambda} = B_{\lambda} \quad (14)$$

en donde B_{λ} es otra constante. Esta relación constituye la segunda de las leyes de desplazamiento, la del desplazamiento «energía-largo de onda».

Las leyes de desplazamiento (13) y (14) permiten determinar la radiación integral correspondiente a una temperatura T_2 cuando se conoce la radiación inte-

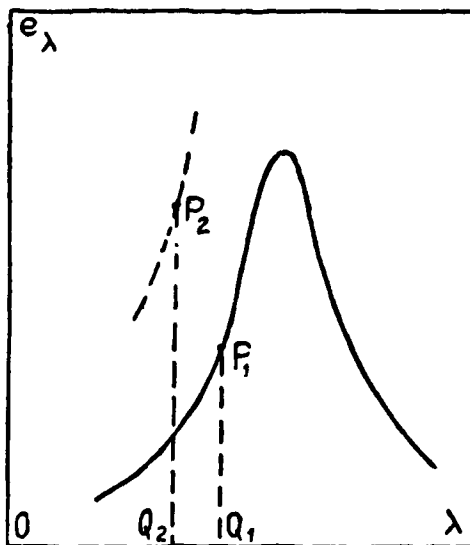


FIG. 18

gral correspondiente a otra temperatura T_1 . Supongamos, por ejemplo, que se ha determinado para la temperatura T_1 (ver en § 5 esta determinación experimental), la curva que relaciona e_λ con λ , y que hemos designado con el nombre de *curva espectral isothermal* correspondiente a la temperatura T_1 . Sea un punto P_1 de esta curva, que indica que la radiación de largo de onda $\lambda_1 = OQ_1$ se presenta en la radiación integral con la intensidad de radiación

$$i_\lambda = e_\lambda d\lambda = P_1 Q_1 d\lambda$$

Entonces, un punto P_2 de la curva espectral correspondiente a la temperatura T_2 podrá ser determinado porque su abscisa $\lambda_2 = OQ_2$ vale, según la primera ley de desplazamiento

$$OQ_2 = \frac{T_1}{T_2} OQ_1$$

y su ordenada $P_2 Q_2$ vale, según la segunda ley

$$P_2 Q_2 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^5 P_1 Q_1$$

Las medidas comprueban que la curva espectral correspondiente a T_2 calculada así por puntos coincide bastante bien con la que se obtiene experimentalmente.

§ 17. LEYES DE WIEN

Las leyes de desplazamiento (13) y (14) demostradas en el § anterior tienen el inconveniente de que los constantes C_λ y B_λ son características de cada radiación monocromática existente en la radiación integral primitiva. Veamos, sin embargo, lo que pasa con la primera ley, cuando se trata del punto de la curva espectral correspondiente al máximo de la intensidad de radiación. Sea λ_1 la abscisa de este punto. La abscisa del punto correspondiente por desplazamiento en la curva espectral de temperatura T_2 , valdría según (13)

$$\lambda_2 = \frac{C_{\lambda_1}}{T_2}$$

Del mismo modo, la abscisa λ_3 del punto correspondiente por desplazamiento en la curva espectral de temperatura T_3 , valdría

$$\lambda_3 = \frac{C_{\lambda_1}}{T_3}$$

Partamos ahora tomando como curva primitiva la de la temperatura T_2 . A su punto de abscisa λ_2 correspondería por desplazamiento en la curva T_3 , un punto de abscisa

$$\lambda'_3 = \frac{C_{\lambda_2}}{T_3}$$

(nótese que la constante C ha cambiado). Pero en el desplazamiento, el punto de ordenada máxima en una curva espectral da lugar al punto de ordenada máxima también en la nueva curva espectral. Luego si λ_1 era abscisa del punto de ordenada máxima en la curva T_1 , λ_2 , λ_3 y λ'_3 son también puntos de ordenada máxima en las curvas T_2 y T_3 . Pero es evidente que la curva T_3 no tiene sino un máximo; luego λ_3 y λ'_3 son iguales o sea que lo son también los coeficientes C_{λ_1} y C_{λ_2} .

Luego, para el punto de ordenada máxima (cuya abscisa designaremos por λ_m), el coeficiente del segundo miembro de la ecuación (13) es independiente de λ , o sea que tiene el mismo valor para todos los largos de onda. Lo designaremos por C , sin índice. Entonces se tendrá

$$\lambda_m T = C \quad (15)$$

Esta fórmula constituye la ley de desplazamiento de Wien. La constante C se llama *constante de desplazamiento de Wien*. Según las mejores determinaciones, cuando λ_m se mide en cms, C vale 0,2884.

El mismo razonamiento conduce al resultado que cuando se trata de la ordenada máxima, la constante B_λ es independiente de λ , de modo que escribiremos

$$\frac{e_m}{T^5} = B$$

y por tanto

$$e_m = B T^5$$

También esta ley se debe a Wien. El valor de B es el mismo para todos los largos de onda.

La ley de desplazamiento de Wien permite determinar la temperatura del sol. En efecto, de las medidas experimentales resulta que la radiación que el sol emite con máxima intensidad es la radiación amarillo-verdosa correspondiente al largo de onda

$$\lambda_m = 0,00055$$

Luego

$$T = \frac{C}{\lambda_m} = \frac{0,2884}{0,00055} = 5240^\circ \text{ absolutos}$$

valor que difiere poco del obtenido con la ley de Stefan.

§ 18. CURVA ESPECTRAL REDUCIDA

Según lo expuesto en el § 16, las leyes de desplazamiento permiten, conocida la curva espectral isothermal correspondiente a una temperatura T_1 , determinar la curva correspondiente a otra temperatura T_2 . Así, en la *fig. 18*, se vió cómo del punto P_1 , de la curva a T_1 se puede deducir el punto P_2 de la curva a T_2 .

De esta aplicación de las relaciones de desplazamiento, resulta entonces evidentemente, que si en esa figura, en lugar de dibujar las curvas isotermas en ejes

e_λ, λ , se las hubiera dibujado en ejes $\frac{e_\lambda}{T^5}, \lambda T$, los puntos P_2 y P_1 habrían co-

incidido, o sea que la isothermal a T_2 se confundiría con la a T_1 , y lo mismo ocurriría para otras temperaturas. Una sola isothermal, que podría calificarse de curva *reducida*, representaría entonces el fenómeno para cualquier temperatura.

Con los datos numéricos acumulados por las determinaciones de e_λ para diferentes largos de onda λ y diversas temperaturas T (§ 5), se ha podido comprobar que esta reducción de las isotermas a una sola, se verifica efectivamente con gran exactitud.

§ 19. LOS LÍMITES DE LAS TEORÍAS ONDULATORIAS.—LA TEORÍA DE PLANCK

Lo anterior, y en especial las leyes de Stefan y de Wien constituyen, puede decirse, el límite a que ha sido posible llegar en el conocimiento de las radiaciones, cuando se razona exclusivamente sobre las bases de las teorías ondulatorias. Pero queda todavía el problema teórico que resolver de la determinación de la ecuación de las curvas espectrales isotermas, o sea, la búsqueda de la función

$$e_\lambda = F(\lambda, T)$$

cuya investigación experimental se explicó en el § 5.

Según las leyes de desplazamiento, se ha visto que se puede representar el fe-

nómeno por una sola curva reducida. en ejes $\frac{e_{\lambda}}{T^5}$, λT , de modo que se debe tener

$$\frac{e_{\lambda}}{T^5} = \Phi(\lambda T)$$

de donde

$$e_{\lambda} = T^5 \Phi(\lambda T)$$

y como según (13)

$$\lambda T = C_{\lambda}$$

resultará

$$e_{\lambda} = \frac{C'}{\lambda^5} \Phi(\lambda T)$$

Queda entonces por determinar $\Phi(\lambda T)$. Sobre esta función los resultados obtenidos anteriormente, indican que ella debe cumplir con las condiciones de que la integral de $e_{\lambda} d\lambda$ para una determinada temperatura, debe ser proporcional a la cuarta potencia de esa temperatura (ley de Stefan), y que el máximo de e_{λ} debe presentarse para un valor constante de λT (ley de desplazamiento de Wien), y su valor (e_m) debe ser proporcional a la quinta potencia de T (segunda ley de Wien).

Diversos físicos (Wien, Thiessen, Jeans, Raleigh), han abordado este problema sobre las bases de las teorías ondulatorias, pero los resultados obtenidos no han concordado sino en parte con las medidas experimentales. En cambio, Planck logró formular una expresión de e_{λ} , notablemente congruente con las medidas, para todos los largos de onda.

Pero esta fórmula fué encontrada sobre la base de la teoría de Planck, que es una teoría *corpuscular* de la radiación, porque supone que la energía radiante tiene una estructura discontinua. En efecto, en la base de esta teoría está el *quantum* de Planck, que es una cantidad elemental de energía radiante,— una especie de átomo indivisible de radiación, distinto de una clase de radiación a otra—que tiene el valor

$$h\nu$$

en donde h es la constante de Planck (llamada también *elemento de acción*) que vale

$$h \approx 6,55 \times 10^{-27} \text{ C.G.S.}$$

y ν es la frecuencia de la radiación, o sea el valor recíproco del período de vibración:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

Ahora bien, según Planck, una cantidad W de energía radiante de calidad λ se expresará en quanta $h\nu$ de energía de esa calidad, en la forma

$$W = Q h \nu$$

en donde Q no es una cantidad numérica cualquiera, sino precisa y únicamente un número entero $1, 2, 3, 4, \dots$.

La teoría de los quanta es, en cierto modo, una vuelta a la teoría de la emisión de Newton, que fué la primera hipótesis que se formuló para explicar los fenómenos luminosos, pero es evidente que ahora este retorno a la idea de los corpúsculos de luz, aparece abonado por diversas consideraciones.

Así, se ha recordado (§ 2), que la teoría de los intercambios establece que la radiación integral tiene una composición determinada, siempre la misma para la misma temperatura, y que esta composición es independiente de la naturaleza de las paredes de la cavidad que contiene la radiación integral; que esta radiación se mueve continuamente en todas direcciones, sin que exista en la cavidad una dirección preponderante en tal movimiento; en seguida se ha visto que la radiación presenta una densidad, y por último, que ejerce una presión sobre las paredes del recinto que la contiene, presión que es proporcional a aquella densidad. Si se piensa bien, todas estas propiedades las tienen también los gases, cuya constitución corpuscular (moléculas) es una evidencia de la Física, y cuyas propiedades encuentran precisamente su explicación más clara en dicha constitución, y en el hecho de que esas moléculas constitutivas de los gases se están moviendo continuamente, sin que presenten una dirección privilegiada de movimiento. No es raro entonces que para la energía radiante sea admisible también una estructura de esa naturaleza.

Entonces, en la radiación integral existente en una cavidad cerrada, o emitida por un cuerpo negro, la energía total W estará constituida de $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ cantidades elementales de energía radiante de las diferentes calidades $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ o sea, que en dicha cavidad existirán los quanta $h\nu_1, h\nu_2, h\nu_3, \dots$ cada uno de ellos en un número entero determinado.

Ahora, según las ideas de Planck, cada uno de estos números Q está determinado por la posibilidad de que la cavidad que contiene la energía W oscile con la frecuencia del quantum de energía correspondiente, para lo cual la cavidad deberá constituir un *resonador* o un sistema de resonadores, para la ondulación de que se trata. Lo primero que debe investigarse entonces es el número N de estos resonadores que, para una calidad determinada de radiación, existe en una cavidad.

Conocido este número, se puede calcular en seguida de cuántas maneras pueden los Q elementos de energía de que se trata, distribuirse en los N osciladores que le proporciona la cavidad. La fórmula del análisis combinatorio que da ese número es

$$P = \frac{(N + Q - 1)!}{Q! (N - 1)!}$$

Este número P resulta extraordinariamente elevado, lo que quiere decir que la energía en consideración se puede distribuir en la cavidad, en sus elementos $h\nu$, de un modo extraordinariamente grande de maneras o *complexeiones*, pero no de un número infinito de maneras, como ocurriría si la energía tuviera una constitución continua.

En cuanto a cuál de esas numerosísimas maneras posibles de distribución es la que adopta el sistema en un momento dado, no puede contestarse sino que ello será un resultado del azar; como ninguna complexión es privilegiada, todas son igualmente probables, y es por eso que ese número P mide la *probabilidad termodinámica* del sistema (*). Ahora bien, esa probabilidad, según lo expresa matemáticamente la relación de Boltzmann está relacionada con la *entropía* del sistema, magnitud en cuya expresión entra la temperatura. Se ve entonces que se logra así llegar a relacionar la distribución de la energía radiante en sus radiaciones componentes, con la temperatura de la cavidad que contiene esa energía.

Explicada de esta manera la marcha de los razonamientos en la teoría de Planck, pasemos a los detalles de su desarrollo.

§ 20. DETERMINACIÓN DE N

Como se sabe, en los sistemas físicos de estructura discontinua, compuestos de un enorme número de corpúsculos, éstos no pueden ser individualizados, y pueden tener separadamente comportamientos cinemáticos, dinámicos o de otro orden, muy diferentes de un corpúsculo a otro. En tales casos, las propiedades o los fenómenos que ocurren en esos sistemas (propiedades y fenómenos que son los conocidos por la observación) están determinados por los valores medios estadísticos que toman las magnitudes que caracterizan tales propiedades y fenómenos. Este hecho, que se considera fundamental en la Física moderna (puesto que la materia, la electricidad, la energía, tienen estructuras discontinuas) se refleja en la validez de las leyes físicas, a cuyo respecto puede decirse que el antiguo determinismo absoluto que se les atribuía, ha venido siendo reemplazado por el concepto de que ellas tienen sólo una probabilidad estadística de verificarse. Consecuencia de estas modalidades de los sistemas discontinuos es también la imposibilidad que existe de determinar el valor de las magnitudes relacionadas con sus individuos separadamente. Así el número N que nos preocupa en la teoría de Planck es indeterminable.

Pero puede en cambio determinarse el número N_1 de osciladores existentes en una cavidad y que resuenan con ondulaciones de largos de onda superiores o iguales a λ_1 , y por consiguiente también se conocerá el número N_2 de resonadores correspondientes a largos de onda superiores o iguales a λ_2 . Entonces, $(N_1 - N_2)$ será evidentemente el número de osciladores que corresponderán a largos de onda que estén comprendidos entre λ_1 y λ_2 . En seguida se comprende que se pueden acercar estos límites λ_1 y λ_2 cada vez más, para encerrar entre ellos, cada vez con mayor precisión, un determinado valor de λ ; pero no se puede llegar al límite de hacer $\lambda_1 = \lambda_2$, porque entonces $N_1 - N_2$ se anula, y el número N buscado no puede determinarse. Pero antes de llegar a este límite, se puede establecer la relación diferencial que dé el número dN de osciladores que resuenan con largos de onda comprendidos entre λ y $(\lambda + d\lambda)$, relación que es precisamente la que se necesita para la teoría de Planck.

Para hacer esta determinación, comencemos por imaginar una cavidad que ca-

(*) Sobre la «probabilidad termodinámica», ver *La relación de Boltzmann*, por Gustavo Lira, Anales de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, 1944.

lificaremos de *unidimensional* por tener una sola dimensión finita, y las otras dos infinitamente pequeñas, o sea un cilindro de sección transversal infinitamente pequeña y de largo d . Es evidente que en su interior las ondulaciones pueden propagarse solamente en el sentido del largo, reflejándose en las bases del cilindro y produciendo entonces una onda estacionaria, con nodos en los extremos del cilindro. Como entre nodos debe haber una distancia igual a un número entero de semilargos de onda, debe verificarse que

$$d = n \frac{\lambda}{2}$$

en donde n es un número entero. Entonces este oscilador lineal constituye un resonador para todos los largos de onda definidos por el valor

$$\lambda = \frac{2d}{n}$$

Pasemos ahora a un resonador *bidimensional* formado por dos bases rectangulares $A B C D$, $A' B' C' D'$ separadas por una distancia ϵ infinitamente pequeña (fig. 19). Una ondulación que se propagase por el interior de esta cavidad correspondería por ejemplo a un rayo tal como $M_0 M_1 M_2 M_3, \dots$ todo él situado en un solo plano paralelo a las caras basales de la cavidad, y que se reflejaría formando ángulos θ_1 con las caras laterales que se proyectan según d_1 , y ángulos θ_2 con las caras que se proyectan según d_2 . Las superficies de onda de la onda estacionaria formada por las reflexiones en las paredes laterales de la cavidad, serían normales a los rayos, y si se trata de superficies nodales, guardarían entre ellas la distancia $\frac{\lambda}{2}$ (líneas de trazos en la figura). Ahora bien, superficies nodales deben pasar necesariamente por las aristas AA' , BB' , CC' , $\dots$, lo que permite establecer la relación

$$a M_1 + M_1 b = n_1 \frac{\lambda}{2}$$

en donde n_1 es un número entero, como así mismo

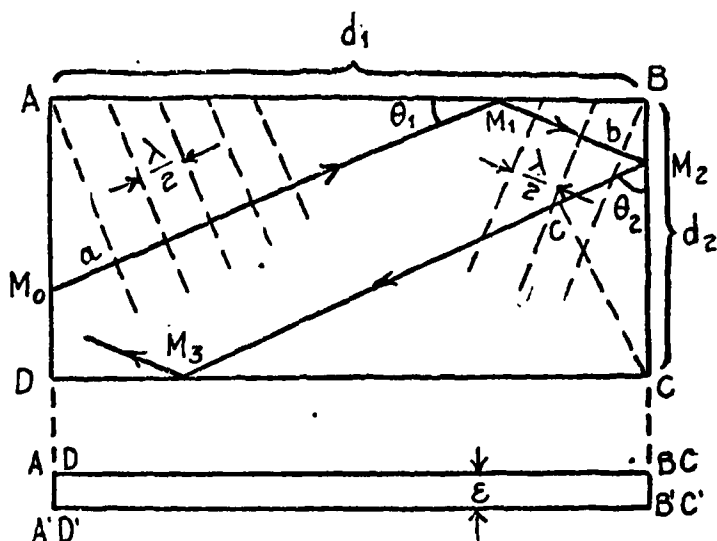
$$b M_2 + M_2 c = n_2 \frac{\lambda}{2}$$

en donde n_2 es otro número entero. Pero

$$a M_1 = A M_1 \cos \theta_1$$

$$M_1 b = M_1 B \cos \theta_2$$



FIG. 19.

con lo cual, reemplazando en la primera ecuación, resulta

$$d_1 \cos \theta_1 = n_1 \frac{\lambda}{2}$$

Análogamente, tratando la segunda ecuación, sale

$$d_2 \cos \theta_2 = n_2 \frac{\lambda}{2}$$

y como los ángulos θ_1 y θ_2 son complementarios:

$$\left(\frac{n_1 \lambda}{2 d_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2 \lambda}{2 d_2} \right)^2 = \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 = 1$$

Inmediatamente, y por analogía se puede escribir que para una cavidad tridimensional finita, de forma de un paralelepípedo recto rectangular de lados d_1 , d_2 , d_3 , se verificaría que

$$\left(\frac{n_1 \lambda}{2 d_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2 \lambda}{2 d_2} \right)^2 + \left(\frac{n_3 \lambda}{2 d_3} \right)^2 = 1$$

Apliquemos esta relación a una cavidad de forma cúbica, y sea d el valor común de las tres aristas. Resulta inmediatamente

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4 d^2}{\lambda^2}$$

Entonces si en esta ecuación en el segundo miembro se da a λ el menor valor λ_m compatible con la condición de que n_1 , n_2 y n_3 sean números enteros, toda combinación de valores enteros de n_1 , n_2 y n_3 que dé una suma de sus cuadrados inferior a

$$\frac{4d^2}{\lambda_m^2}$$

corresponderá a un largo de onda $\lambda > \lambda_m$, para el cual la cavidad cúbica considerada constituye un resonador.

Escribamos la ecuación para λ_m

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4d^2}{\lambda_m^2}$$

Si se llevan en tres ejes coordenados rectangulares OX , OY , OZ (fig. 20) los valores de n_1 , n_2 , n_3 , esta ecuación representa una esfera de radio

$$R = \frac{2d}{\lambda_m}$$

de la cual sólo debe interesar el octante comprendido entre la parte positiva de los tres ejes, puesto que n_1 , n_2 , n_3 , no pueden tomar sino valores positivos. Tomemos entonces según el eje OX , n_1 unidades ($OA = n_1$), y según OY , n_2 unidades ($OB = n_2$). En el plano de las XY éstas serán las coordenadas de un punto P . Trazando por P la paralela al eje OZ hasta cortar en C la superficie del octante, se ve que PC tendrá un largo que valdrá un cierto número de unidades enteras, más una fracción, en el caso más general. Entonces, cada una de las combinaciones n_1 , n_2 , 1; n_1 , n_2 , 2; n_1 , n_2 , 3; etc., de los cuales existen tantos como unidades enteras contiene PC , dará una suma de cuadrados inferior a $\frac{4d^2}{\lambda_m^2}$, lo que in-

dica la existencia de tantos resonadores correspondientes a largos de onda mayores que λ_m , como unidades enteras hay en PC . Ahora si se trazan las líneas contiguas paralelas a AP y a BP , se determina alrededor de P un cuadrado unitario, y si por sus vértices se trazan las paralelas a PC , y se dividen también éstas en unidades, queda determinada, con base en el cuadrado formado alrededor de P , una columna paralela a OZ , compuesta de tantos cubos unitarios como unidades enteras hay en PC , número de cubos que representará también un número de resonadores correspondientes a largos de onda mayores que λ_m . En seguida, modificando los valores de n_1 y de n_2 se determinarán otros puntos P , otras verticales PC y otras columnas de cubos unitarios que se desarrollan bajo el octante de esfera, y es evidente entonces que el número total de cubos unitarios así formado dará el el número total de resonadores que en la cavidad existen y que corresponden a largos de onda mayores que λ_m . Pero ese número total de cubos es la medida del vo-

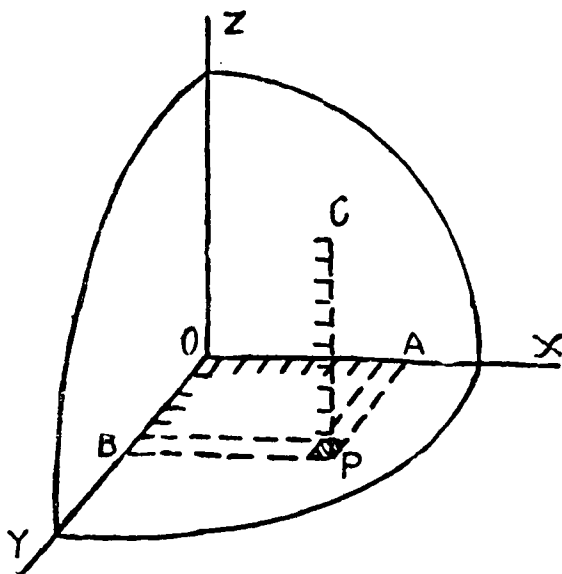


FIG. 20.

lumen del octante (*); luego se tendrá que el número N de resonadores correspondientes a largos de onda mayores que λ valdrá

$$N_{\lambda} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2d}{\lambda} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{\lambda^3}$$

lo que da, por unidad de volumen de la cavidad un número

$$n_{\lambda} = \frac{N_{\lambda}}{d^3} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\lambda^3} \quad (17)$$

De aquí sale que el número dn_{λ} de resonadores existentes en la unidad de volumen de la cavidad y correspondientes a largos de onda comprendidos entre λ y $(\lambda + d\lambda)$ vale

$$dn_{\lambda} = -\frac{4\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (17 \text{ bis})$$

en donde se ha suprimido el signo negativo que sólo indica que el número n_{λ} disminuye cuando λ crece.

Para las radiaciones, la fórmula anterior necesita todavía una modificación, por cuanto las radiaciones constituyen ondulaciones transversales que pueden veri-

(*) Con un error que es tanto más pequeño cuantos más altos valores puedan alcanzar los números enteros n , lo que precisamente ocurre en el caso de las radiaciones, por ser los valores de λ extraordinariamente pequeños.

ficarse según cualquier azimut alrededor del rayo. Esto duplica el número de resonadores, porque las oscilaciones que se verifiquen según azimutes arbitrarios, se pueden siempre reducir a oscilaciones independientes en dos azimutes normales entre sí. Para las radiaciones se tendrá entonces

$$d n_{\lambda} = \frac{8 \pi}{\lambda^4} d \lambda \quad (7 \text{ ter}) (*)$$

§ 21. LA ECUACIÓN ESPECTRAL DE PLANCK

Establecido lo anterior, consideremos la cantidad W de energía radiante de calidat λ a distribuir en una cavidad en donde existen N resonadores correspondientes. El número P de maneras (complexiones) como puede hacerse esta distribución vale, según se ha recordado.

$$P = \frac{(N + Q - 1)!}{Q! (N - 1)!}$$

Tomando logaritmos naturales:

$$\text{Log } P = \text{Log} \left[(N + Q - 1)! \right] - \text{Log} \left[Q! \right] - \text{Log} \left[(N - 1)! \right]$$

Como N y Q son números extraordinariamente grandes, se pueden expresar los factoriales por la fórmula de Stirling

$$q! = \sqrt{2 \pi q} \left(\frac{q}{e} \right)^q$$

en donde e es la base de los logaritmos naturales. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Log} \left(q! \right) &= \frac{1}{2} \text{Log} \left(2 \pi q \right) + q \text{Log } q - q \\ &= \frac{1}{2} \text{Log } 2 \pi + \frac{1}{2} \text{Log } q + q \text{Log } q - q \\ &= \frac{1}{2} \text{Log } 2 \pi + \left(\frac{1}{2} + q \right) \text{Log } q - q \end{aligned}$$

Aquí, como q es muy grande, se puede despreciar $\frac{1}{2}$ al lado de q , y también el término $\frac{1}{2} \text{Log } 2 \pi$. Queda

(*) La fórmula (17 bis) es aplicable a vibraciones longitudinales como son por ejemplo las del sonido en el aire. Ella será válida entonces para los resonadores acústicos de aire, tales como son los tubos sonoros, las cajas sonoras de los pianos, etc.

$$\text{Log } (q!) = q \text{ Log } q - q$$

Aplicando esta fórmula al $\text{Log } P$ resulta

$$\begin{aligned} \text{Log } P &= (N + Q - 1) \text{Log } (N + Q - 1) - N - Q + 1 \\ &\quad - Q \text{Log } Q + Q - (N - 1) \text{Log } (N - 1) + N - 1 \\ &= (N + Q - 1) \text{Log } (N + Q - 1) - Q \text{Log } Q - (N - 1) \text{Log } (N - 1) \end{aligned}$$

y despreciando la unidad frente a Q y a N

$$\text{Log } P = (N + Q) \text{Log } (N + Q) - Q \text{Log } Q - N \text{Log } N$$

Ahora, la energía W por distribuir tiene, según Planck, la expresión

$$W = Q h \nu$$

Al variar esta energía de la cantidad

$$dW = h \nu dQ$$

la entropía Φ variará de la cantidad

$$d\Phi = \frac{dW}{T} = \frac{h \nu}{T} dQ$$

en donde T es la temperatura de la cavidad.

Pero según la relación de Boltzmann

$$d\Phi = \frac{R}{(N)} d(\text{Log } P)$$

en donde R es la constante universal de los gases, y (N) es el número de Avogadro. Igualando los dos valores de $d\Phi$

$$\frac{h \nu}{T} dQ = \frac{R}{(N)} d(\text{Log } P)$$

o bien

$$\frac{h \nu (N)}{R T} = \frac{d(\text{Log } P)}{dQ}$$

Pero de la expresión encontrada más atrás

$$\text{Log } (P) = (N + Q) \text{Log } (N + Q) - N \text{Log } N - Q \text{Log } Q$$

sale, derivando

$$\begin{aligned}\frac{d(\text{Log } P)}{dQ} &= \frac{N+Q}{N+Q} + \text{Log}(N+Q) - \frac{Q}{Q} - \text{Log } Q \\ &= \text{Log}(N+Q) - \text{Log } Q = \text{Log} \frac{N+Q}{Q}\end{aligned}$$

Luego

$$\text{Log} \frac{N+Q}{Q} = \frac{h\nu(N)}{RT}$$

o pasando a la función exponencial

$$N+Q = Qe^{\frac{h\nu(N)}{RT}}$$

de donde

$$Q = \frac{N}{e^{\frac{h\nu(N)}{RT}} - 1}$$

con lo cual

$$W = Q h\nu = \frac{N h\nu}{e^{\frac{h\nu(N)}{RT}} - 1}$$

Como la energía W se habría repartido en los N osciladores, la energía media W_1 correspondiente a cada oscilador sería

$$W_1 = \frac{W}{N} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu(N)}{RT}} - 1}$$

Ahora bien, como en la unidad de volumen hay (§ 19)

$$dn_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

osciladores correspondientes a la radiación comprendida entre λ y $(\lambda + d\lambda)$, en la unidad de volumen habrá una energía radiante de esa calidad (y que no es otra cosa que la densidad de energía)

$$U_{\lambda} = u_{\lambda} d\lambda = W_{\lambda} d n_{\lambda} = \lambda^4 \left\{ \frac{\frac{8\pi h \nu}{R T}}{e - 1} \right\} d\lambda$$

Si se recuerda por fin que

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}$$

se puede escribir también

$$U_{\lambda} = u_{\lambda} d\lambda = \lambda^5 \left\{ \frac{\frac{8\pi h c}{R \lambda T}}{e - 1} \right\} d\lambda \quad (18)$$

que es una de las formas que se da a la célebre ecuación espectral de Planck.

Una segunda forma se deduce recordando (§ 12) que

$$e_{\lambda} = \frac{c}{4\pi} u_{\lambda}$$

Resulta

$$e_{\lambda} = \lambda^5 \left\{ \frac{\frac{2 h c^2}{R \lambda T}}{e - 1} \right\} \quad (19) (*)$$

§ 23. VERIFICACIONES DE LA ECUACIÓN DE PLANCK

Como se dijo anteriormente, las curvas espectrales determinadas experimentalmente concuerdan notablemente con la ecuación de Planck. Probemos ahora que de ella se pueden deducir también las leyes de Stefan y de Wien.

Para demostrar la ley de Stefan hagamos en (18)

$$C_1 = 8\pi h c$$

$$C_2 = \frac{h c (N)}{R}$$

(*) Aunque por la deducción hecha de la ecuación de Planck pudiera creerse que ella fuese aplicable sólo a una cavidad cúbica, su universalidad se ve evidente si se recuerda que la composición de la radiación integral es independiente de la forma y dimensiones de la cavidad, y de la naturaleza de sus paredes.

Entonces

$$U_{\lambda} = u_{\lambda} d\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} d\lambda$$

Integrando

$$U = C_1 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)}$$

Haciendo la sustitución

$$\frac{C_2}{\lambda T} = x$$

de donde

$$\lambda = \frac{C_2}{Tx}$$

y por lo tanto

$$d\lambda = -\frac{C_2}{T} \frac{dx}{x^2}$$

resulta

$$U = \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

integral que se resuelve desarrollando en serie:

$$U = \frac{C_1}{C_2^4} T^4 \int_0^{\infty} \left(x^3 e^{-x} + x^3 e^{-2x} + x^3 e^{-3x} + \dots \right) dx$$

Aplicando la solución general de la integral definida

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

resulta

$$U = \frac{6 C_1}{C_2^4} T^4 \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \dots \right)$$

$$= 1,082 \frac{6 C_1}{C_2^4} T^4$$

$$= 1,082 \frac{48 \pi R^4}{h^3 c^3 (N)^4} T^4$$

que es la ecuación de Stefan: (§ 13)

$$U = A T^4$$

Luego el coeficiente A tiene el valor teórico

$$A = 1,082 \frac{48 \pi R^4}{h^3 c^3 (N)^4}$$

Con los valores numéricos en unidades C.G.S.

$$R = 8,3136 \times 10^7$$

$$h = 6,55 \times 10^{-27} \quad (\text{según Millikan})$$

$$c = 3 \times 10^{10}$$

$$(N) = 6,064 \times 10^{23} \quad (\text{según Millikan})$$

resulta $A = 7,58 \times 10^{-15}$

que puede compararse con el valor experimental dado en § 13.

Busquemos ahora la condición y el valor del máximo de e .

El máximo ocurrirá para el mínimo de

$$\lambda^5 \left\{ \frac{hc(N)}{R \lambda T} - 1 \right\}$$

y quedará determinado igualando a cero la derivada de esta expresión. Resulta, llamando λ_m el largo de onda correspondiente al máximo

$$-\frac{hc(N)}{R \lambda_m^2 T} e^{\frac{hc(N)}{R \lambda_m T}} \lambda_m^5 + 5 \lambda_m^4 \left\{ e^{\frac{hc(N)}{R \lambda_m T}} - 1 \right\} = 0$$

o sea

$$e^{\frac{hc(N)}{R \lambda_m T}} \left\{ 5 - \frac{hc(N)}{R \lambda_m T} \right\} = 5$$

ecuación de la forma $e^x (5 - x) = 5$ que se satisface con el valor

$$x = \frac{hc(N)}{R\lambda_m T} = 0$$

que no tiene significación física, y también con

$$x = \frac{hc(N)}{R\lambda_m T} = 4,965$$

de donde

$$\lambda_m T = \frac{hc(N)}{4,965 R}$$

que es, como se ve, la ley de desplazamiento de Wien. Introduciendo los valores numéricos en unidades C.G.S., resulta

$$\lambda_m T = 0,2884$$

valor que es igual al encontrado experimentalmente. Si se reemplaza λ por λ_m en la expresión (19) de e_λ se obtendrá el valor del máximo de e_λ , que llamaremos e_m . Resulta:

$$e_m = \frac{2hc^2}{\lambda_m^5 \left(e^{\frac{4,965}{\lambda_m T}} - 1 \right)}$$

y como para λ_m se verifica que

$$\lambda_m = \frac{0,2884}{T}$$

queda

$$\begin{aligned} e_m &= \frac{2hc^2}{\left(0,2884 \right)^5 \left(e^{\frac{4,965}{\lambda_m T}} - 1 \right)} \\ &= 4,14 \times 10^{-5} T^5 \end{aligned}$$

que es la otra ley de Wien. (§ 17).