

**ESTUDIO ELASTICO DE UNA VIGA ALTA EMPOTRADA
SOMETIDA A UNA DESNIVELACION DE APOYO**

Por

Luis A. Rosenberg V.

ESTUDIO ELASTICO DE UNA VIGA ALTA EMPOTRADA SOMETIDA A UNA DESNIVELACION DE APOYO*

Por

Luis A. Rosenberg V.**

RESUMEN

En este trabajo se trata de resolver un problema de borde mixto en elasticidad plana: el de una chapa cuadrada sobre la cual se especifican en dos bordes opuestos fatigas normales y tangenciales nulas, y en los otros dos bordes, desplazamientos dados, a saber, un corrimiento paralelo de uno de los bordes con respecto al otro en su misma dirección. Este problema corresponde al de una viga doblemente empotrada de altura igual a su luz, sometida a una desnivelación de apoyos.

El problema se resuelve estableciendo las ecuaciones de diferencias finitas correspondientes a las ecuaciones de equilibrio en términos de los corrimientos (ecuaciones de Navier) y resolviéndolas por medio del método de relajación de Southwell. Con esto se obtienen los valores de u y v en los puntos nodales, a partir de los cuales se calculan las fatigas normales y tangenciales en las secciones media y extremas y en algunas secciones intermedias.

Se comparan los resultados obtenidos con los que daría la teoría elemental de las vigas tomando en cuenta la corrección por esfuerzo de corte; se calculan también las rigideces transversales y angulares de la chapa y se comparan con las que da la teoría elemental.

SUMMARY

The solution of a mixed boundary value problem in Plane Elasticity is attempted in the present paper: that of a square plate with forces in its own plane, subjected to zero shear and normal stresses on two opposite sides and on the other two sides to specified displacements which in the present case consist of a parallel displacement of one of the sides relative to the other in its own direction. This problem corresponds to a built-in beam whose height is equal to its span subjected to the settlement of one of its supports.

The problem is solved by writing the finite differences equations equivalent to the equilibrium equations in terms of displacements (Navier equations) and by solving them by means of Southwell's relaxation method. In this way, values of the displacements u and v at the nodal points of the mesh are obtained and from them, values for the shear and normal stresses at several cross-sections of the plate are calculated.

These results are confronted with those which the elementary beam theory (including shear effects) would give for the same problem. Transverse and angular rigidities are also calculated and compared.

1. INTRODUCCION

Es de indudable interés conocer la solución que da la teoría elástica para la rigidez transversal de un muro cuyos extremos están perfectamente empotrados. El interés es mayor cuando la altura del muro es comparable a su largo, porque

*Recibido para su publicación en diciembre de 1961.

**Ingeniero civil, Laboratorio de Estructuras, Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile.

en estos casos ya no es evidente que las correcciones usuales en Resistencia de Materiales (corrección por esfuerzo de corte) sigan siendo válidas.

Aunque la condición teórica de empotramiento perfecto no corresponde a ningún caso real, porque en la realidad siempre habrá mayor o menor elasticidad en los apoyos, el problema es siempre interesante porque marca un límite hacia el cual tenderán los casos reales a medida que aumente la rigidez de sus apoyos.

El problema planteado en esta forma (con empotramiento perfecto) es de los que se llaman en elasticidad plana problemas mixtos, que, en general, son más difíciles de abordar que aquellos en que las condiciones de borde son de la misma naturaleza en todo el contorno.

El caso que estudiaremos será el del muro de igual longitud que su altura, quedando convertido entonces en una chapa cuadrada. Este problema también corresponde al de una viga alta perfectamente empotrada, sometida a una desnivelación de apoyos.

Para su solución emplearemos el método muy general de convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones a diferencias finitas buscando la solución del sistema por el método de relajación de Southwell.

Mencionaremos que este problema ha sido abordado para otra relación altura-luz por Inglis (1923), y por MANN (1949), por medio de series trigonométricas. La solución propuesta por Mann conduce a un sistema de ecuaciones que se resuelven fácilmente por iteración. Este autor se limita a calcular la fatiga máxima de cizalle sin entrar a calcular el esfuerzo de corte, los momentos de flexión, ni las rigideces, que es lo que más nos interesa desde el punto de vista estructural.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Usando el método de relajación se presentan dos maneras de plantear el problema: o en términos de la función de tensiones ϕ o en términos de los corrimientos u y v . En este último caso tendremos un número doble de ecuaciones que si trabajamos con ϕ ; pero la mayor sencillez con que se plantean las condiciones de borde y sobre todo la mayor eficiencia de los operadores de relajación que se utilizan, nos hicieron decidirnos por este método.

Planteado de esta manera, el problema queda como muestra la figura N^o 1, en que L es el lado de la chapa y Δ el desplazamiento de un lado con respecto al otro. El desplazamiento unitario será $\Delta/L = R$. Basta sólo considerar un cuarto del cuadrado debido a que se cumplen las siguientes relaciones de simetría:

$$\begin{array}{l} u \text{ es una función } \left\{ \begin{array}{l} \text{par en } x \\ \text{impar en } y \end{array} \right. \\ v \text{ es una función } \left\{ \begin{array}{l} \text{impar en } x \\ \text{par en } y \end{array} \right. \end{array}$$

como es fácil de comprobar.

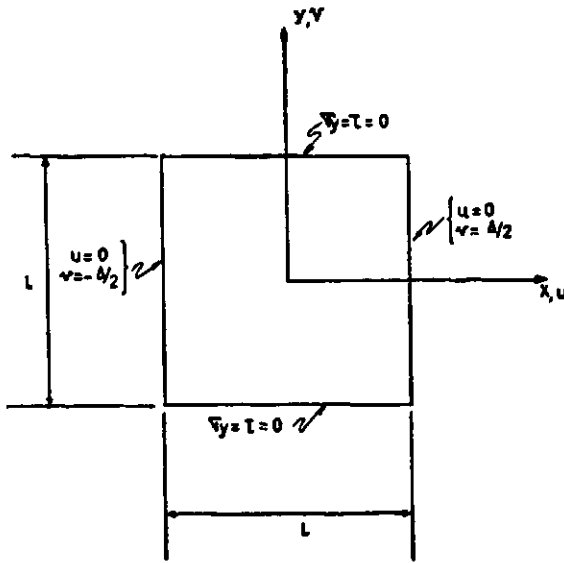


Figura 1

Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema son las ecuaciones de equilibrio en términos de los corrimientos (ecuaciones de Navier):

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 u + \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \\ \frac{1-\nu}{1+\nu} \nabla^2 v + \frac{\partial e}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

En el presente caso, aceptaremos para ν el valor

$$(2) \quad \nu = \frac{1}{8}$$

Con este valor, las ecuaciones (1) se convierten en:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \\ 7 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 16 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Estas son, pues, las ecuaciones diferenciales que rigen nuestro problema. Las condiciones de borde, expresadas en términos de u y v son las siguientes:

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} y = \pm \frac{L}{2}, \\ x = -\frac{L}{2}, \\ x = \frac{L}{2}, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ u = 0 \\ v = -\Delta/2 \\ u = 0 \\ v = \Delta/2 \end{array} \right.$$

Los sistemas (3) y (4) definen completamente el problema elástico.

3. RESOLUCION POR EL METODO DE RELAJACION

Para convertir este problema de ecuaciones diferenciales en uno de diferencias finitas, introduciremos las aproximaciones usuales.

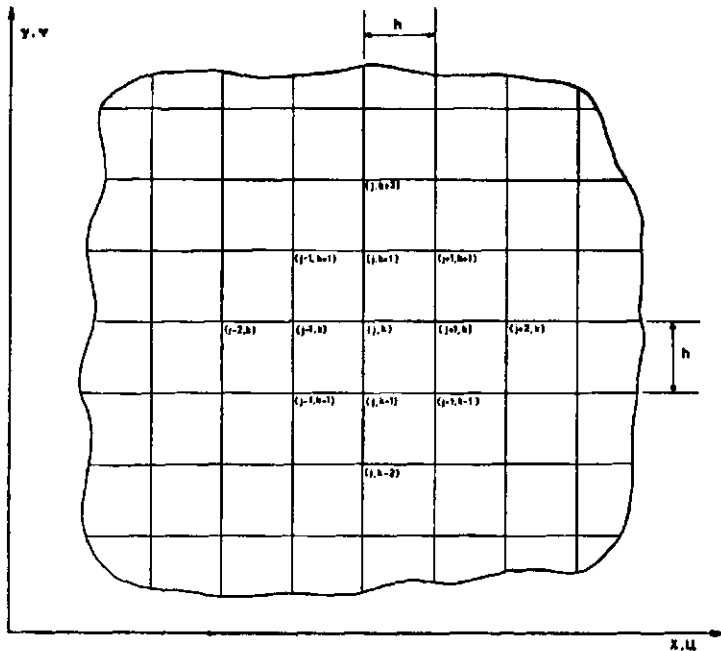


Figura 2

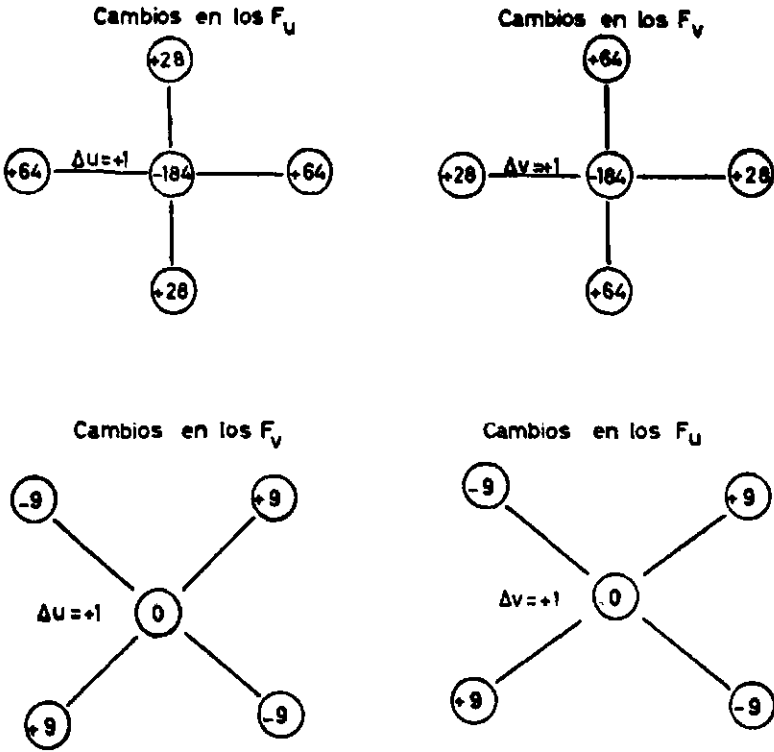
$$(5) \left\{ \begin{aligned} h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{j,k} &= u_{j+1,k} + u_{j-1,k} - 2u_{j,k} \\ h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{j,k} &= u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 2u_{j,k} \\ h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{j,k} &= \frac{1}{4} \left(u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1} + u_{j-1,k-1} \right. \\ &\quad \left. - u_{j+1,k-1} \right) \end{aligned} \right.$$

Introduciendo (5) en (3), llegamos a las siguientes ecuaciones a diferencias finitas:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} F_u &= 64 \left(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} \right) + 28 \left(u_{j,k+1} + u_{j,k-1} \right) - \\ &\quad - 184 u_{j,k} + 9 \left(v_{j+1,k+1} - v_{j-1,k+1} + v_{j-1,k-1} - \right. \\ &\quad \left. - v_{j+1,k-1} \right) = 0 \\ F_v &= 64 \left(v_{j,k+1} + v_{j,k-1} \right) + 28 \left(v_{j+1,k} + v_{j-1,k} \right) - \\ &\quad - 148 u_{j,k} + 9 \left(u_{j+1,k+1} - u_{j-1,k+1} + u_{j-1,k-1} - \right. \\ &\quad \left. - u_{j+1,k-1} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

En que hemos llamado F_u y F_v los residuos que se obtienen al introducir valores arbitrarios para u y v en cada punto nodal. Estos son los residuos que deben reducirse lo más aproximadamente posible a cero en el proceso de relajación.

Estas ecuaciones conducen a los operadores generales de relajación que toman la siguiente forma en nuestro caso particular.



Estos operadores toman formas especiales en los bordes, para cumplir con las condiciones de fatigas normal y tangencial nulas, para lo cual se introducen ciertos puntos ficticios más allá del borde. Ver Fox (1947); WITTRICK and HOWARD (1948) y SHAW (1953).

Como en nuestro caso trabajaremos sólo con un cuarto de la chapa, el cuarto superior derecho, será también necesario hacer algunas sencillas modificaciones a los operadores de los bordes izquierdo e inferior para tener en cuenta la paridad de las funciones.

El problema se resolvió por etapas sucesivas, duplicando cada vez la malla. Para facilitar el cálculo numérico se puso $\Delta/2 = 1000$.

Los resultados de la última etapa se muestran en la Fig. 3.

En esta etapa sólo se trabajó con un sector de la chapa vecino de la esquina, ya que fuera de ese sector, los resultados obtenidos por interpolación, a partir de los valores de la malla anterior, no dan residuos apreciables.

A partir de los corrimientos de Fig. 3, se calcularon las fatigas tangenciales (Fig. 5) y las fatigas normales σ_x (Fig. 6), para distintas secciones transversales de la chapa. Por integración numérica se obtuvieron los valores del esfuerzo de corte y del momento de flexión para cada una de las secciones mostradas en las figuras 4 y 5.

El esfuerzo de corte, que debería ser constante para cada una de las secciones transversales de la chapa, presenta una fluctuación máxima de 5,2%. Con esto queremos significar que la diferencia entre el mayor y el menor valor del esfuerzo de corte partido por el valor menor es de un 5,2%.

El momento de flexión que debería mostrar una variación lineal, presenta una fluctuación máxima de sólo 0,5%.

Por este motivo, nos parece más segura la determinación del esfuerzo de corte y del momento en el empotramiento a base de las curvas de σ_x . Usando solamente tres cifras, tendríamos los valores

$$\begin{aligned} M &= 0,136 EbL^2R \\ Q &= 0,272 EbLR \end{aligned} \quad (7)$$

Este valor de Q es, por lo demás un valor intermedio entre los límites que dan las curvas de τ .

El valor máximo de la fatiga tangencial se produce en el punto medio de la chapa y vale

$$\tau_{\text{máx}} = 0,412 ER$$

o sea, usando el valor de Q dado por (7).

$$\tau_{\text{máx}} = 1,51 \tau_{\text{medio}}$$

que es casi la misma relación que se obtendría en una distribución de Jouravsky.

El valor máximo de la fatiga normal σ_x se produce en la esquina del empotramiento y en los cálculos se observó que su valor aumentaba a medida que se hacía más fina la malla, lo que hace pensar que existe una singularidad en este punto como creen HILDEBRAND and REISSNER (1953). En todo caso, se trataría de una singularidad local, que no afectaría mayormente la distribución de fatigas en el resto de la chapa.

Si calculamos la fatiga en el borde por medio de la fórmula

$$\sigma = \frac{M}{W}$$

vemos que el cálculo elástico arroja, para secciones situadas a $L/8$, $L/4$, $3L/8$ y $L/2$ del centro de la chapa, valores que son un 9,3%, 11,5%, 23% y 87% superiores a los que daría la distribución lineal de fatigas. De estas cifras, las tres primeras deben considerarse sensiblemente correctas; no así la última, por la razón señalada más arriba.

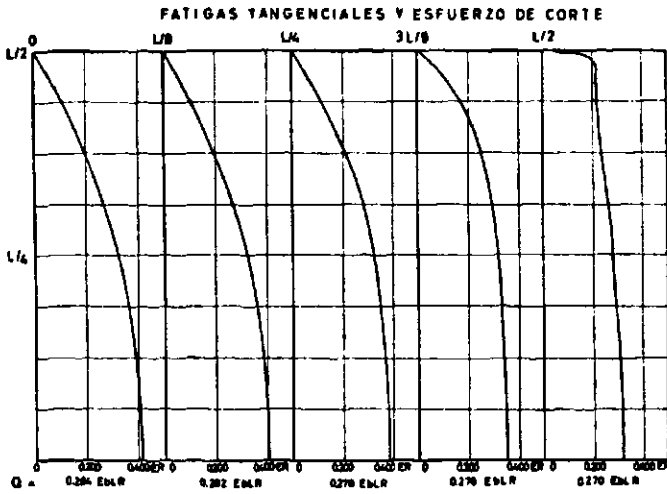


Figura 5

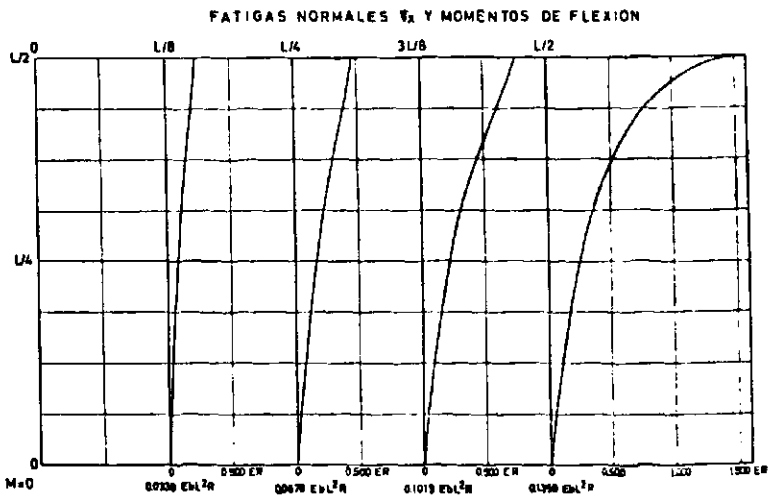


Figura 6

4. CONFRONTACION DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL ESTUDIO ELASTICO CON LOS QUE SE OBTIENEN EN RESISTENCIA DE MATERIALES

De la última etapa podemos adoptar, como resultado final del estudio elástico, los siguientes valores para el esfuerzo de corte y el momento de flexión.

$$Q = 0,272 E b \Delta$$
$$M = 0,136 E b L \Delta$$

Si llamamos rigidez K la razón entre la fuerza aplicada y el desplazamiento:

$$K = Q/\Delta$$

tendremos que en la solución elástica,

$$K = 0,272 E b$$

Veamos cómo se compara este resultado con el que da la teoría de la flexión usual.

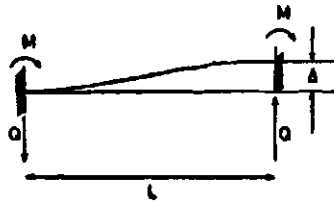


Figura 7

Tenemos que en ésta el caso es el de la Fig. 7, en que sabemos que

$$M = 6 E I \Delta / L^3$$

$$Q = 12 E I \Delta / L^3$$

pero en el presente caso, en que la altura de la viga es igual a la luz,

$$I = \frac{1}{12} b L^3$$

luego

$$Q = E b$$
$$M = 0,5 E b L \Delta$$

y la rigidez

$$K = E b$$

resulta mucho mayor que la real.

Por eso, la Resistencia de Materiales corrige la fórmula de la flecha, tomando en cuenta el esfuerzo de corte, con lo que resultaría

$$\Delta = \frac{QL^3}{12EI} + \frac{\alpha QL}{GA}$$

siendo α el factor de forma que para la sección rectangular vale 6/5. Nuevamente $I = bL^3/12$ y $A = bL$

$$\Delta = \frac{Q}{Eb} + \frac{6}{5} \frac{\alpha Q}{Gb}$$

pero en nuestro caso, como tomamos $\nu = \frac{1}{8}$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{4}{9} E$$

luego

$$\Delta = \frac{Q}{Eb} (1 + 2,7)$$

y

$$K = \frac{Eb}{3,7} = 0,270 Eb$$

valor que concuerda bastante bien con el obtenido en la solución elástica.

Veamos ahora qué valores se deducen del estudio elástico para dos conceptos muy usados en Teoría de las Estructuras: la rigidez angular y el factor de transporte.

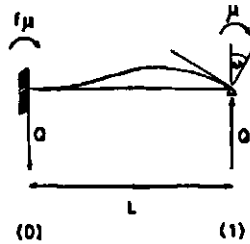


Figura 8

La rigidez angular se suele definir en Teoría de las Estructuras como la razón entre el momento aplicado y el ángulo de giro de la sección en el extremo simplemente apoyado de una viga que tiene su otro extremo empotrado (Fig. 8).

$$k = \frac{\mu}{\omega_1}$$

y se llama factor de transporte f la razón entre el momento inducido en el extremo empotrado y el momento aplicado.

En la teoría de la flexión usual, estos conceptos tienen la siguiente expresión

$$k = 4EI/L$$

$$f = 0,5$$

que en nuestro caso se traducen en

$$k = 0,333 EbL^3$$

$$f = 0,5$$

Si se aplica la corrección por esfuerzo de corte, los valores resultan, como es sabido,

$$k = \frac{1 + j}{0,25 + j} \frac{EI}{L}$$

$$f = \frac{0,5 - j}{1 + j}$$

siendo

$$j = \frac{3 \times EI}{L^2 GA}$$

que en nuestro caso, con $I = bL^3/12$, $A = bL$ y $E/G = 9/4$, resulta

$$j = 0,675$$

y de aquí:

$$k = 0,151 Eb L^3$$

y

$$f = -0,104$$

Estos conceptos son propios de la Teoría de las Estructuras y su validez ha sido discutida para razones altura-luz como la usada en el presente trabajo.

Elásticamente, sí a la solución encontrada en el presente trabajo superponemos un estado de flexión pura tal, que la flecha compense exactamente el desplazamiento paralelo que hemos impuesto en nuestro caso, obtendremos una sollicitación como la de (c) de la Fig. 9, en que la cara de la izquierda ha mantenido su posición, y la de la derecha ha girado en torno a su punto medio, conservándose plana, dándose entonces el caso para el cual se han definido los conceptos de rigidez angular y factor de transporte. Debemos advertir, sin embargo, que de acuerdo a la solución elástica del caso de flexión pura, los puntos de ambas caras experimentan desplazamientos verticales de magnitud variable.

Para el caso de flexión pura tenemos, llamando r el radio de curvatura:

$$u = \frac{1}{r} xy$$

$$v = \frac{1}{2r} (x^2 + y^2)$$

tomando los ejes como en (b) de la Fig. 8, la flecha la tendremos haciendo $y = 0$, $x = L$:

$$\Delta = \frac{1}{2r} L^2$$

prescindiendo del signo. Luego

$$\frac{1}{r} = \frac{2\Delta}{L^2}$$

$$M = \frac{EI}{r} = \frac{2EI\Delta}{L^2} = 0,167 EbL \Delta$$

Para $x = L$

$$u = \frac{L}{r} y = \frac{2\Delta}{L} y$$

y el ángulo de giro de la sección extrema

$$\omega_1 = \frac{u}{y} = \frac{2\Delta}{L}$$

con esto resultan para los momentos los valores de (c) de la Figura 9, de donde se deduce que la rigidez angular

$$k = \frac{\mu}{\omega_1} = 0,152 EbL^3$$

y el factor de transporte

$$f = \frac{-0,031}{0,303} = - 0,102$$

el signo — indica que el momento inducido es de signo contrario que el momento aplicado.

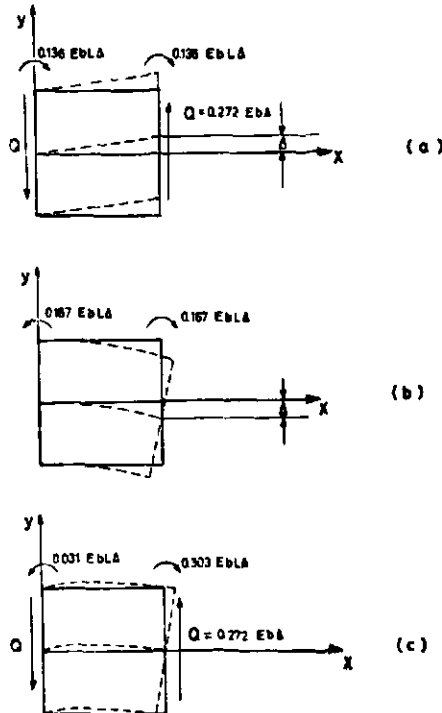


Figura 9

En resumen tenemos:

	<i>Solución elástica</i>	<i>Fórmulas de resistencia</i>
Rigidez transversal	0,272 Eb	0,270 Eb
Rigidez angular	0,152 EbL ²	0,151 EbL ²
Factor de transporte	-0,102	-0,104

o bien, expresado en términos de I:

Rigidez transversal	3,26 EI/L ³	3,24 EI/L ³
Rigidez angular	1,82 EI/L	1,81 EI/L

REFERENCIAS

- FOX, L. (1947): Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plane strain or stress). Proc. Royal Soc. A 189. 535-543.
- HILDEBRAND, F. B. and REISSNER, E. (1942): Distribution of Stress in Built-in Beams of narrow Rectangular Cross Section. Journ. of Applied Mechanics, September 1942, Vol. 9, Nº 3, A-108, A-116.
- MANN, E. H. (1949): Shearing Displacement of a Rectangular Plate. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 45, Part 2, April 1949. 258-262.
- SHAW, F. S. (1953): An introduction to Relaxation Methods. Dover, New York.
- WITTRICK, W. H. and HOWARD, W. (1948): Relaxation methods as applied to two problems of two-dimensional stress distribution involving mixed boundary conditions. Aust J. Sci Res., A, 1, 135-160.