

**ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL INTERIOR DE UN
PLANETA NO EVOLUTIVO**

Por

Cinna Lomnitz

ESFUERZOS Y DEFORMACIONES EN EL INTERIOR DE UN PLANETA NO EVOLUTIVO*

p o r

C. LOMNITZ**

ABSTRACT

The case of a hypothetical planet with an initial structure and density distribution similar to the present earth, is analyzed. Bullen's and Gutenberg's values for the densities and velocities in the interior are assumed, then gravity force is "turned on". Values for the radial and tangential stresses and strains are calculated following derivations by Lamé and Love. The radial strains are contractional in the interior and extensional in an outer shell of 800 km thickness. The deviatoric stress is of the order of 170,000 atmospheres near the surface and 600,000 atmospheres near the core boundary. The pressure at the center of the planet, assuming a liquid core, would be about 14 million atmospheres. The influence of the assumed method of formation of the earth on the stress-strain distribution is discussed.

RESUMEN

Se analiza el caso de un planeta hipotético con estructura inicial y distribución de densidad similar a la Tierra actual. Suponiendo los valores de Bullen y Gutenberg para las densidades y velocidades del interior, "se aplica" la fuerza de gravedad. Utilizando las deducciones de Lamé y Love se calculan los valores de los esfuerzos y las deformaciones radiales y tangenciales. Las deformaciones radiales son contracciones en el interior y extensiones en la cubierta externa de 800 Km de espesor y el esfuerzo de desviación del orden de 170.000 atmósferas cerca de la superficie y de 600.000 atmósferas cerca del límite del núcleo. Suponiendo un núcleo líquido, la presión en el centro del planeta sería de 14 millones de atmósferas. Se discute la influencia del supuesto método de formación de la Tierra, según la distribución de esfuerzos y deformaciones.

INTRODUCCION

Uno de los más viejos problemas en Geofísica es determinar la distribución de esfuerzos y deformaciones dentro de la Tierra. Ese problema está colmado de incertidumbres, resultantes de la diversidad de soluciones derivadas de los datos superficiales y, en general, de la falta de datos. JEFFREYS (1959) declaró que el mejor método para estimar la distribución interior de esfuerzos consistiría en asumir un método dado de formación de la Tierra y sacar las consecuencias. Al presente, se ha reconocido que el verdadero problema es precisamente definir el método o proceso que formó la Tierra. Sea por acreción de partículas frías de polvo o por condensación de una nube cálida y sea que el calor generado por el proceso de acreción haya sido o no importante en la determinación de la temperatura inicial de la Tierra, las etapas primeras de su historia afectan nuestro pensamiento de manera vital.

*Recibido para su publicación en diciembre de 1961.

**Director del Instituto de Geofísica y Sismología, Universidad de Chile.

Para contribuir adicionales elementos de juicio a un problema que sufre de muchas indeterminaciones, puede ser útil idear experimentos teóricos capaces de definir los límites de la solución. En el presente trabajo consideraremos el caso hipotético de un planeta similar a la Tierra que no ha evolucionado.

CALCULO

Supóngase un planeta esférico con el mismo tamaño, estructura, densidad y distribución de rigidez de la Tierra e imagínese que el planeta fue creado instantáneamente o si se prefiere, en ausencia de campos gravitacionales y otros.

Ahora póngase la gravitación. Los principios de la siguiente derivación, aplicados al caso de una esfera homogénea fueron dados por LAMÉ (1852) y LOVE (1927). La ecuación diferencial de equilibrio en coordenadas polares, asumiéndose simetría radial cerca del centro del planeta, es:

$$\left(\lambda + 2 \mu \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} + 2 \frac{U}{r} \right) + \rho B = 0 \quad (1)$$

en que U es el desplazamiento, ρ la densidad en el radio r, y B la fuerza del cuerpo. Se dan signos positivos a todos los vectores dirigidos en el sentido del incremento de r o alejándose del centro de la esfera.

La fuerza gravitacional del cuerpo se escribe:

$$B = - \gamma m / r^2 \quad (2)$$

en que $\gamma = 6.673 \times 10^{-8}$ cgs es la constante gravitacional de Newton y m la masa contenida dentro de una esfera de radio r. El valor de esta masa puede escribirse:

$$m = 4 \pi \int \rho r^2 dr \quad (3)$$

Introduciendo estos valores en la ecuación diferencial y calculando $(\lambda + 2 \mu) / \rho = V_p^2$, obtenemos:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} \right) = \frac{4 \pi \gamma}{r^2 V_p^2} \int \rho r^2 dr \quad (4)$$

Integrando se obtiene la ecuación diferencial lineal:

$$\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} = 4 \pi \gamma \left[F(r) + C_1 \right] \quad (5)$$

donde

$$F(r) = \int^r \frac{\int \rho r^2 dr}{r^2 V_p^2} dr \quad (6)$$

La solución de esta ecuación se escribe:

$$U = \frac{4 \pi \gamma}{r^2} \left\{ \int F(r) r^2 dr + \frac{r^3}{3} C_1 + C_2 \right\} \quad (7)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan por medio de dos condiciones de límites. Si se dan las velocidades y densidades en el interior, la selección de condiciones de límites se reduce a un desplazamiento cero en el centro y a una deformación radial cero en la superficie. La condición de una interfase sólido-líquido en el límite del núcleo ya está implícita en la velocidad y distribución de densidades dada.

La primera condición de límite da:

$$C_2 = 0 \quad (8)$$

La segunda se obtiene considerando el esfuerzo radial (LOVE, 1927):

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + 2\lambda \frac{U}{r} \quad (9)$$

Sustituyendo los valores de U y $\frac{dr}{dU}$ obtenidos de la ecuación (7), con $r = R$

e igualando a cero, obtenemos:

$$C_1 = \frac{6(I - 2\sigma)}{I + \sigma} \phi(R) - 3 \frac{I - \sigma}{I + \sigma} F(R) \quad (10)$$

en que σ es el cociente de Poisson en la superficie, y:

$$\phi(r) = \frac{I}{r^3} \int r^2 F(r) dr \quad (11)$$

Finalmente, sustituyendo los valores de las constantes de integración en la ecuación (7), encontramos:

$$U = 4 \pi r \gamma \left[\phi(r) + \frac{2(I - 2\sigma)}{I + \sigma} \phi(R) - \frac{I - \sigma}{I + \sigma} F(R) \right] \quad (12)$$

La deformación radial se obtiene por diferenciación de (12):

$$\epsilon_r = \frac{dU}{dr} = 4 \pi \gamma \left[F(r) - 2\phi(r) + \frac{2(I - 2\sigma)}{I + \sigma} \phi(R) - \frac{I - \sigma}{I + \sigma} F(R) \right] \quad (13)$$

Si ρ y V son funciones definidas positivas del radio, la deformación radial cambiará de signo con cierto valor r_c dado por:

$$F(r_c) - 2\phi(r_c) = \frac{I - \sigma}{I + \sigma} F(R) - \frac{2(I - 2\sigma)}{I + \sigma} \phi(R) \quad (14)$$

La deformación tangencial es dada por:

$$\varepsilon_{\theta} = -\frac{U}{r} = 4 \pi \gamma \left[\phi(r) + \frac{2(1-\sigma)}{1+\sigma} \phi(R) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} F(R) \right] \quad (15)$$

que siempre es negativa (contracción).

La expresión para el esfuerzo radial ya se ha dado (ecuación 9):

$$\widehat{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{dU}{dr} + 2\lambda \frac{U}{r} \quad (9)$$

Si $V_r = [(\lambda + 2\mu) \rho]^{1/2}$ y $V_s = (\mu/\rho)^{1/2}$ son las velocidades de ondas longitudinales y transversales podemos escribir esa expresión como sigue:

$$\widehat{rr} = \rho V_s^2 \left[\varepsilon_r + 2\varepsilon_{\theta} \right] - 4\rho V_s^2 \varepsilon_{\theta} \quad (16)$$

en que ε_r y ε_{θ} son las deformaciones radiales y tangenciales derivadas de las ecuaciones (13) y (15).

Similarmente, los esfuerzos tangenciales:

$$\widehat{\theta\theta} = \lambda \frac{dU}{dr} + 2(\lambda + \mu) \frac{U}{r} \quad (17)$$

pueden escribirse:

$$\widehat{\theta\theta} = \rho V_s^2 \left[\varepsilon_r + 2\varepsilon_{\theta} \right] - 2\rho V_s^2 \left[\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta} \right] \quad (18)$$

La Fig. 1 muestra la densidad y distribución de velocidad supuestas, según valores publicados por BULLEN (1959) y GUTENBERG (1959). Las correspondientes distribuciones de deformaciones se obtienen por integración gráfica de (13) y (15) y el resultado se muestra en la Fig. 2.

Las deformaciones radiales son contracciones en el interior del planeta y extensiones en la cubierta externa. El nivel cero de deformaciones se encuentra a unos 800 Km de profundidad, pero no está asociado con discontinuidad de esfuerzos.

La distribución de esfuerzos se obtiene sustituyendo la expresión de la deformación en (16) y (18), mostrándose los resultados en la Fig. 3. Todos los esfuerzos son comprensivos y crecen uniformemente hacia el centro. En el límite del núcleo las dos curvas de esfuerzos se unen en una sola para satisfacer la condición hidrostática del núcleo.

CONCLUSIONES

Primeramente consideremos la distribución de deformaciones en la Fig. 2. La discontinuidad de la deformación radial a 800 Km de profundidad es obviamente irreal, pues resulta difícil concebir una situación en que la cubierta externa de la Tierra pudiera ser radialmente alargada.

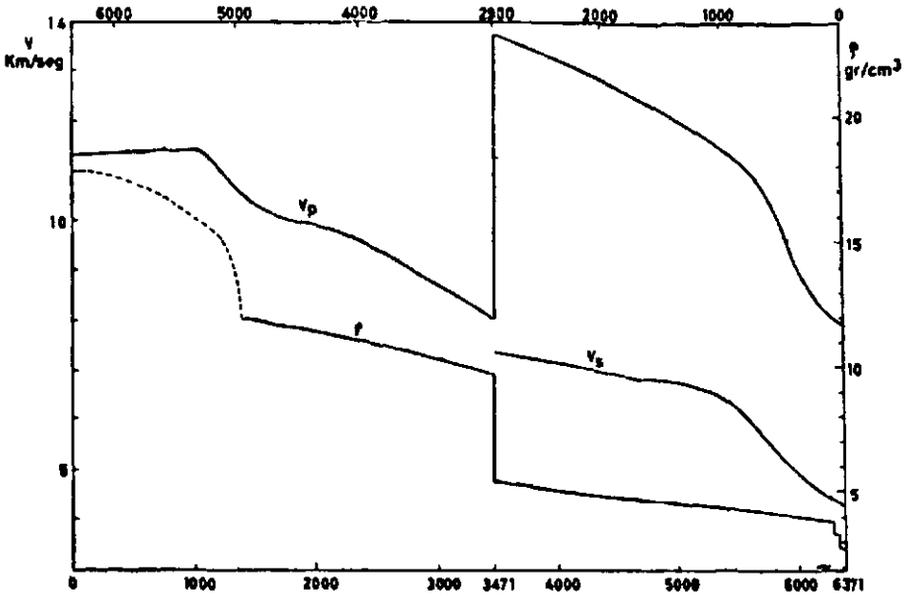


Fig. 1

Podría señalarse que este resultado se obtuvo suponiendo una condición inicial absurda, es decir, con ausencia de fuerzas gravitacionales. Sin embargo, sería bueno preguntarse cuál condición inicial pudiera darse en vez de ella.

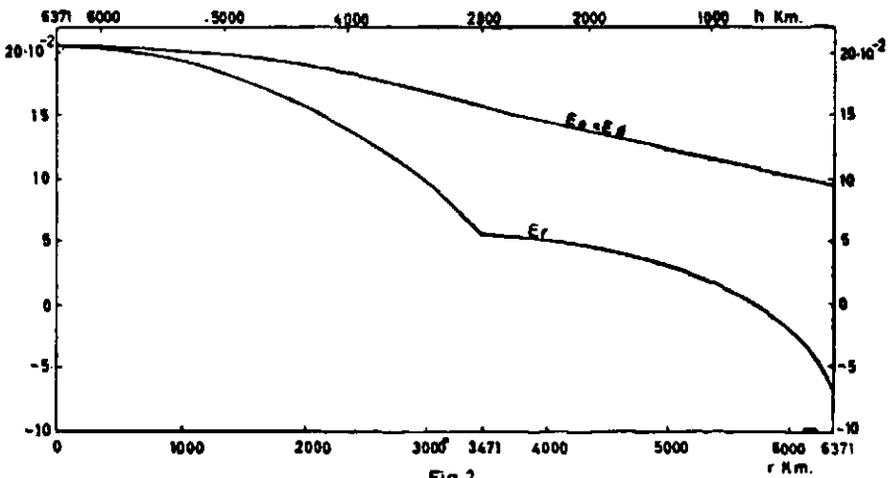


Fig. 2

Ahora consideremos la distribución de esfuerzos (Fig. 3). Aquí la situación parece mejor, pues a lo menos existe cierta apariencia de acuerdo con las actuales interpretaciones de la distribución de presiones dentro de la Tierra. La presión en el centro de la Tierra calculada por nuestro método es de 14 millones de atmósferas contra 4 millones de atmósferas obtenidas por computación hidrostática. Finalmente, al pasar, nótese que los esfuerzos diferenciales en el manto y la corteza exceden mucho a la resistencia conocida de los materiales rocosos.

Con todo propósito nos hemos abstenido de introducir refinamientos en nuestras hipótesis, puesto que el objeto de este trabajo era demostrar un caso hipoté-

tico extremo. En el otro extremo, creemos, está la hipótesis hidrostática, ahora generalmente aceptada y sugerimos que la verdadera distribución de presiones puede encontrarse entre ambos extremos.

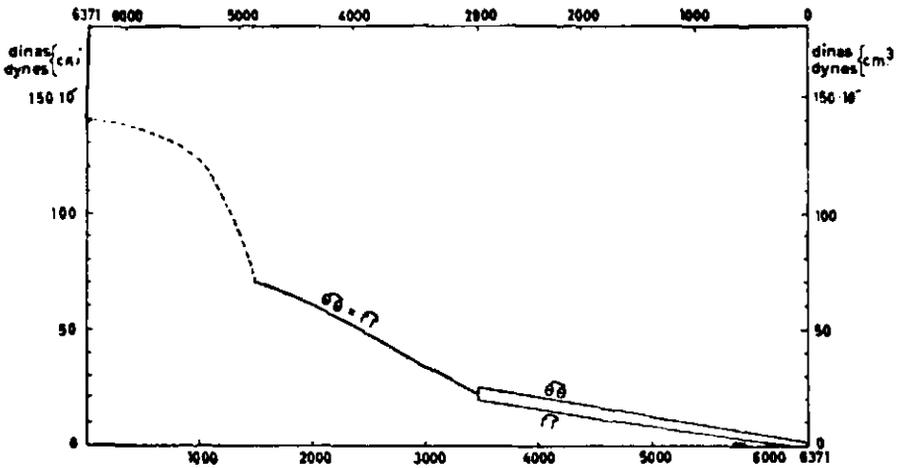


Fig. 3

REFERENCIAS

- BULLEN, K. E. (1959). *An Introduction to the Theory of Seismology* (2nd Ed.). Cambridge, p. 218. Cambridge Univ. Press.
- GUTENBERG, B. (1959). *Physics of the Earth's Interior*. Academic Press, New York.
- HILL, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Univ. Press.
- JEFFREYS, H. (1959). *The Earth*, (4th Ed.). Cambridge Univ. Press.
- KUIPER, G. P. (1954). *The Earth as a Planet*. Chicago Univ. Press, Chicago.
- LAME, G. (1852). *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*. Paris.
- LOMNITZ, C. (1957). Linear Dissipation in Solids. *Jour. Appl. Physics*, 28, p. 201.
- LOVE, A. E. H. (1927). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (4th Ed.). p. 142. Dover, New York.
- LUBIMOVA, E. A. (1958). Thermal History of the Earth with Consideration of the Variable Thermal Conductivity of its Mantle. *Geoph. Journal* 1, p. 115.