METODO DE APROXIMACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA LA SINTESIS DE FUNCIONES MEDIANTE CIRCUITOS ELECTRICOS

Ing. Efraín Asenjo

METODO DE APROXIMACION EN EL DOMINIO DEL TIEMPO PARA LA SINTESIS DE FUNCIONES MEDIANTE CIRCUITOS ELECTRICOS

Ing. Efraín Asenjo
Sección Alta Tensión
y Máquinas. I.I.E.E.

RESUMEN

Se presenta un método de aproximación de funciones en el dominio del tiempo.

La aproximación se realiza haciendo uso de las series de Fourier e introduciendo un factor de amortiguamiento común para los distintos términos. La función queda aproximada así por medio de sinusoides amortiguadas.

Varios ejemplos ilustran el método.

ABSTRACT

A method for the approximation of functions in the time domain is presented. This approximation is attained by using a Fourier series and introducing a damping factor which is the same for all its terms. Thus, the function is approximated by damped sinusoides.

Several examples illustrate the method.

El problema de síntesis en el dominio del tiempo consiste en encontrar un circuito que tenga una respuesta dada en el tiempo para una función de entrada conocida en el tiempo. Para que esto sea posible, la función que relaciona la respuesta y la entrada conocidas debe ser realizable. Esto en general no ocurre y se hace necesario, por lo tanto, aproximar dicha función por una que sea realizable.

Hasta ahora se han desarrollado principalmente métodos de síntesis en el dominio de la frecuencia. Además, como existe una relación entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia a través de los transforms de Fourier y Laplace, un método posible para resolver el problema es transformar los datos del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia y aproximar la función en este dominio. Sin embargo, se ha encontrado que una buena aproximación en el dominio de la frecuencia puede dar una mala aproximación en el dominio del tiempo y es aquí donde interesa controlar los errores. De ahí la conveniencia de aproximar la función en el dominio del tiempo, función que luego se puede sintetizar, ya sea pasando al dominio de la frecuencia (caso general) o directamente en el dominio del tiempo si el circuito correspondiente es fácilmente reconocible.

En este artículo se presenta un método de aproximación en el dominio del tiempo.

Sea $g(t)$ la respuesta de un circuito a un impulso de entrada*. Se tratará de aproximar $g(t)$ mediante sinusoides amortiguadas de igual coeficiente de amortiguamiento.

Supóngase que interesa aproximar $g(t)$ de $t = 0$ a $t = \tau/2$. Se considerará entonces la función $g_1(t)$ definida por:

$$\begin{cases} g_1(t) = g(t) & (0 < t < \tau/2) \\ g_1(t) = 0 & (t > \tau/2) \end{cases}$$

y se analizará la siguiente periódica $h(t)$ de período τ:

$$h(t) = e^{\alpha t} g_1(t) \qquad (0 < t < \tau) \; (\alpha > 0)$$

la que se ilustra en la figura 1.

Desarrollando la función anterior en serie de Fourier, se obtiene una expresión de la forma:

$$h(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n w t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n w t$$

El significado de este desarrollo para los diferentes intervalos de tiempo es el siguiente:

Para $0 < t < \tau/2$,

$$h(t) = e^{\alpha t} g_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n w t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n w t$$

de donde:

$$g_1(t) = g(t) = A_0 e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha t} \cos n w + \sum_{n=1} B_n e^{-\alpha t} \operatorname{sen} n w t$$

Se obtiene así, para el intervalo indicado, una aproximación para $g(t)$ que será tanto mejor cuanto mayor sea el número de términos que se considere en el desarrollo de Fourier.

$$\text{Para } \tau/2 < t < \tau, \qquad h(t) = 0$$

Un número finito de términos en el desarrollo de Fourier da una función $h^*(t)$ que es aproximadamente cero en dicho intervalo.

$$h^*(t) \approx 0$$
$$h^*(t) = e^{\alpha t} g^*_1(t) \approx 0$$

y como $\qquad e^{\alpha t} > 1 \; (\alpha > 0)$

---

*Si se tiene la respuesta a una función de entrada arbitraria se puede encontrar la respuesta a un impulso mediante métodos numéricos. Ref.: E. A. Guillemin "Synthesis of Passive Networks" — J. Wiley, 1959.

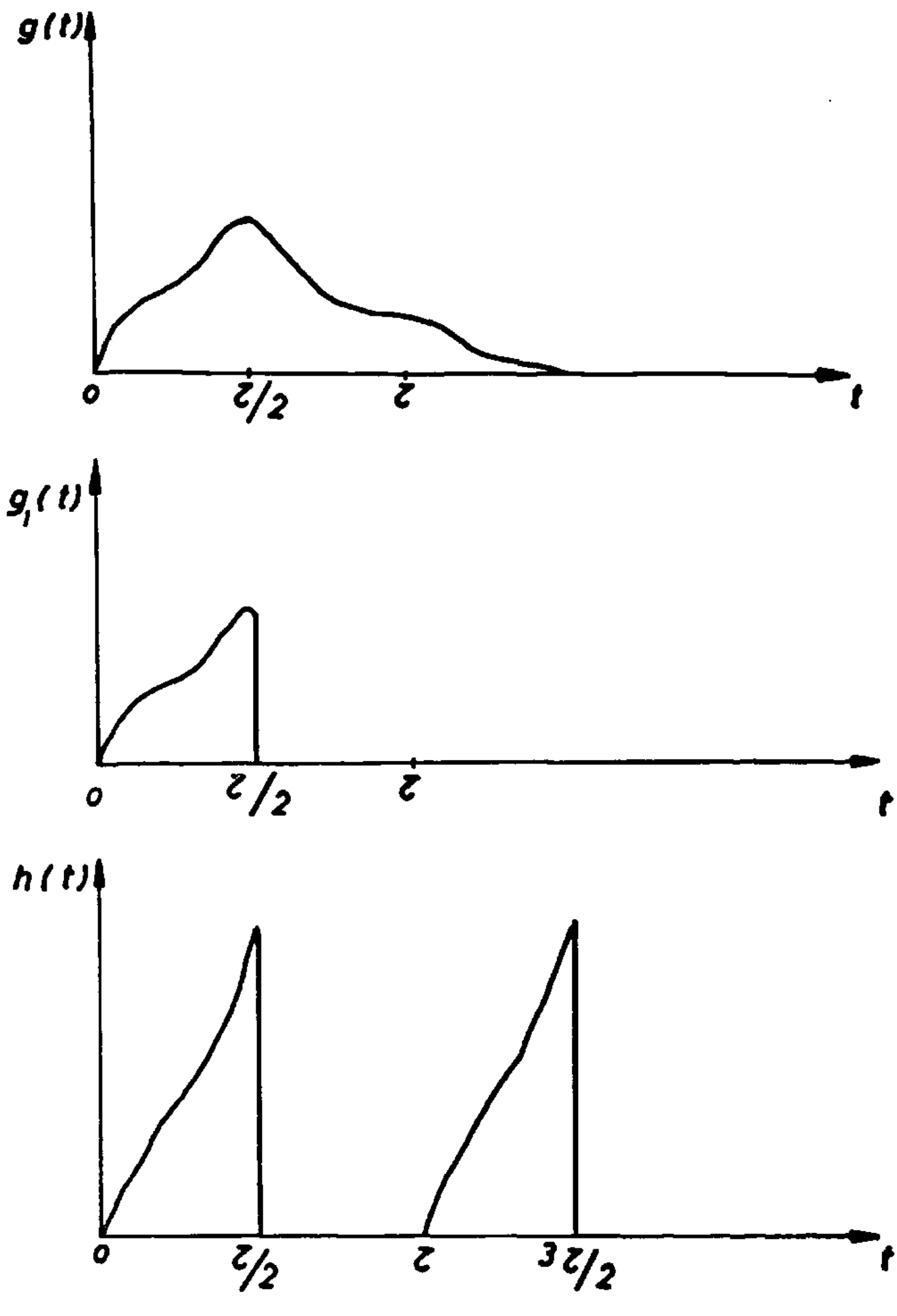

Fig. 1

resulta $\qquad g^*_1(t) \approx O$

Para $\tau < t < 2\tau$, $h^*(t)$ es el mismo que para $O < t < \tau$ pero $g^*_1(t)$ aparece mucho más reducido debido al factor e^{-at}.

Lo anterior se ilustra en la figura 2.

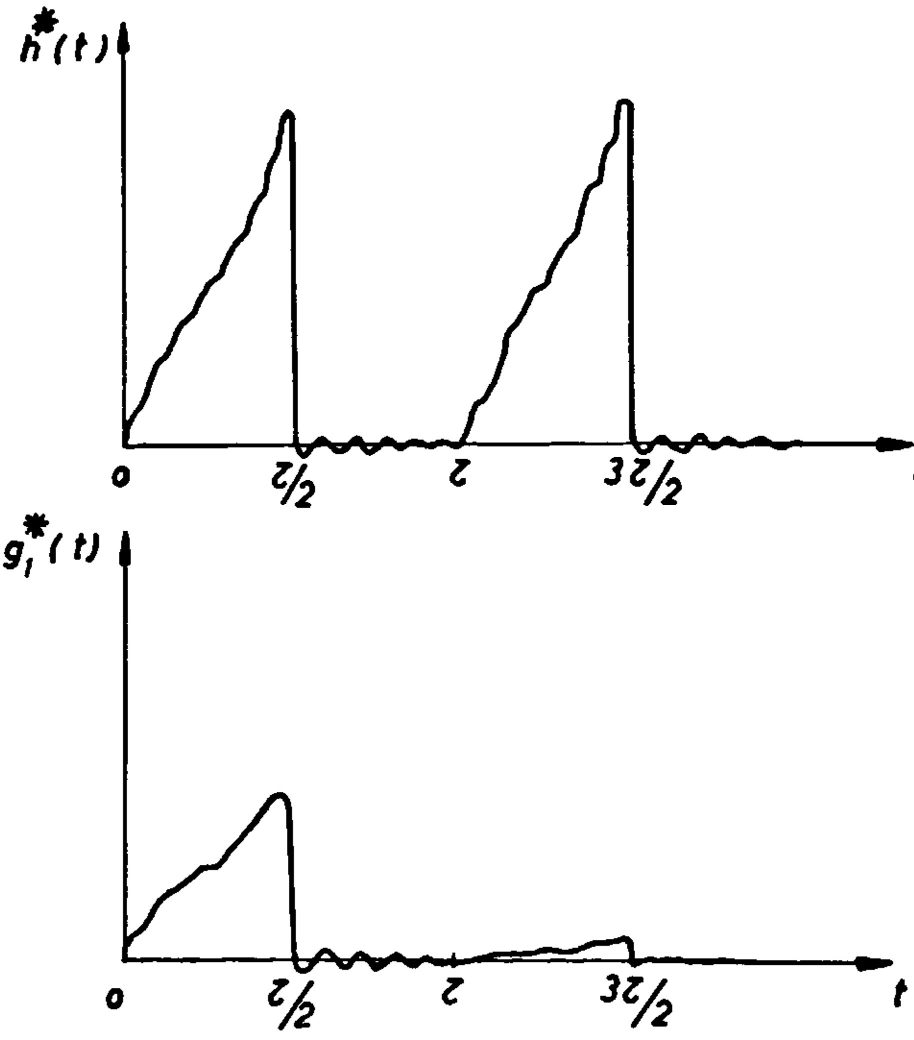

Fig. 2

Resumiendo, la función $g^*_1(t)$ obtenida es una aproximación de $g(t)$ para $O < t < \tau/2$, que es el intervalo que interesa; y para tiempos mayores que $\tau/2$ la exponencial e^{-at} reduce apreciablemente el valor de $g^*_1(t)$, con lo cual el error en la aproximación de $g(t)$ tienden a cero para t suficientemente grande. Se hace notar que aunque el error fuera grande en la zona $t > \tau/2$, no importaría, pues se quiere aproximar bien $g(t)$ el intervalo $O < t < \tau/2$ solamente.

Se ha supuesto por simplicidad que el semiperíodo de la función $h(t)$ es igual al intervalo en el cual interesa aproximar la función $g(t)$. Pero en realidad se puede elegir para $h(t)$ cualquier período siempre que sea mayor que el intervalo en el cual se quiere aproximar $g(t)$, siempre que se mantenga la aproximación de $g(t)$ en este intervalo.

Además, se ha considerado una función periódica auxiliar $h(t)$ tal que $h(t) = O$ para $\tau/2 < t < \tau$. Esta elección conviene siempre que $g(O^+) = O$. Si $g(O^+) \neq O$ conviene elegir una función periódica $h(t)$ tal que $h(O^+) = h(\tau^-)$. Todo esto se hace para evitar una discontinuidad en $h(t)$ para $t = \tau$ ya que si $h(O^+) \neq h(\tau^-)$, $h(\tau^-) \neq h(\tau^+)$ y se hace más difícil obtener una buena aproximación. Como interesa aproximar $g(t)$ sólo en cierto intervalo, se puede elegir $h(t)$ en forma arbitraria fuera de dicho intervalo y en particular se puede elegir $h(t)$ tal que $h(\tau^-) = h(O^+)$ ya que τ es mayor que el intervalo en el cual interesa aproximar $g(t)$. Para $g(O^+) = O$ también se podría usar el criterio indicado para $g(O^+) \neq O$, o sea, hacer sólo $h(O^+) = h(\tau^-)$ en vez de elegir $h(t) = O$ para todo el semiperíodo $\tau/2 < t < \tau$.

Dado que la función $h(t)$ que se debe usar es arbitraria fuera del intervalo en el cual interesa aproximar $g(t)$ (excepto el hacer $h(O^+) = h(\tau^-)$ por conveniencia), se podría pensar en encontrar una función $h(t)$ tal que el error en el intervalo que interesa sea mínimo cumpliéndose, además, la condición $h(O^+) = h(\tau^-)$.

En el caso en que se desee aproximar un pulso $g(t)$ que es cero para $t > t_1$, es muy conveniente la elección de $\tau = 2\, t_1$ y de $h(t) = O$ para $\tau/2 < t < \tau$.

Aproximación de un pulso triangular tipo diente de sierra.

El pulso se muestra en la figura 3.

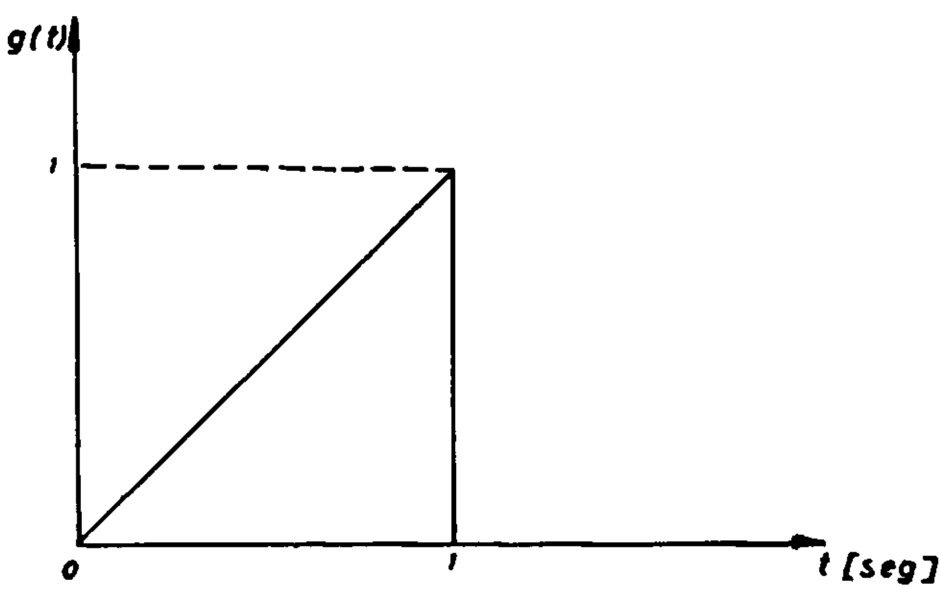

Fig. 3

La función $g(t)$ está definida por:

$$\begin{cases} g(t) = t & (0 < t < 1) \\ g(t) = 0 & (t > 1) \end{cases}$$

Elíjase $\tau = 2$ segundos.

Entonces: $g_1(t) = g(t) \qquad (0 < t < 1)$

Se observa que en este caso $g_1(t) = g(t)$.

El valor de α se determinará posteriormente.

La función periódica $h(t)$ con período $\tau = 2$ segundos está dada, por lo tanto, por la expresión:

$$h(t) = e^{\alpha t} g_1(t) = e^{\alpha t} g(t) \qquad (0 < t < 2)$$

O sea:

$$\begin{cases} h(t) = t\, e^{\alpha t} & (0 < t < 1) \\ h(t) = 0 & (1 < t < 2) \end{cases}$$

Con la elección anterior se cumple la condición $h(0^+) = h(\tau^-)$ pues:

$$h(0^+) = e^{\alpha t} g(0^+) = 0 \quad \text{y} \quad h(\tau^-) = e^{2\alpha} g(2^-) = 0$$

Además, $h(t) = 0$ para $\tau/2 < t < \tau$.

Desarrollando en serie de Fourier, se tiene:

$$h(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\,\omega\,t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} n\,\omega\,t$$

en que:

$$A_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} h(t)\, dt$$

$$A_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2/\pi\omega} h(t) \cos n\,\omega\,t\, dt$$

$$B_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} h(t) \operatorname{sen} n\,\omega\,t\, dt$$

de donde, considerando que $\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$,

$$A_0 = \tfrac{1}{2} \int_0^2 h(t)\, dt = \tfrac{1}{2} \int_0^1 t\, e^{\alpha t}\, dt$$

$$A_0 = \frac{e^{\alpha} (\alpha - 1)}{2\,\alpha^2} + \frac{1}{2\,\alpha^2}$$

$$A_n = \int_0^2 h(t) \cos \pi\, n\, t\, dt = \int_0^1 t\, e^{\alpha t} \cos \pi\, n\, t\, dt$$

$$A_n = (-1)^n \frac{\alpha\, e^{\alpha}}{\alpha^2 + (\pi\, n)^2} - (-1)^n \frac{e^{\alpha}\, [\alpha^2 - (\pi\, n^2)]}{[\alpha^2 + A\pi\, n)^2]^2} +$$

$$\frac{\alpha^2 - (\pi\, n)^2}{[\alpha^2 + (\pi\, n)^2]^2}$$

$$B_n = \int_0^2 h(t) \operatorname{sen} \pi\, n\, t\, dt = \int_0^1 t\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \pi\, n\, t\, dt$$

$$B_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi\, n\, e^{\alpha}}{\alpha^2 + (\pi\, n)^2} + (-1)^n \frac{2\, \pi\, \alpha\, n\, e^{\alpha}}{[\alpha^2 + (\pi\, n)^2]^2}$$

$$- \frac{2\, \alpha\, \pi\, n}{[\alpha^2 + (\pi\, n)^2]^2}$$

De las expresiones de A_n y B_n se puede deducir que conviene elegir $\alpha < 2$ para obtener una buena aproximación con un número reducido de términos. Si $\alpha < 1$ la aproximación de $g(t)$ para $0 < t < \tau$ es aún mejor. Sin embargo, la aproximación para $t > \tau$ es peor pues la atenuación disminuye. En realidad, esto importa sólo si interesa aproximar el pulso para todo t. Se elegirá $\alpha = 1$ como un buen compromiso.

Introduciendo $\alpha = 1$; $n = 1, 2, \ldots 7$ en las expresiones de A_0, A_n y B_n se obtiene:

$A_0 =$	$0{,}5$		
$A_1 =$	$-\ 0{,}529$	$B_1 =$	$0{,}588$
$A_2 =$	$0{,}108$	$B_2 =$	$-\ 0{,}408$
$A_3 =$	$-\ 0{,}072$	$B_3 =$	$0{,}202$
$A_4 \approx$	0	$B_4 =$	$-\ 0{,}198$
$A_5 \approx$	0	$B_5 =$	$0{,}153$
$A_6 \approx$	0	$B_6 =$	$-\ 0{,}138$
$A_7 \approx$	0	$B_7 =$	$0{,}117$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g^*(t) = e^{-t} h^*(t) = e^{-t}\, [&0.5 - 0.529 \cos \pi t + 0.588 \operatorname{sen} \pi t + 0.108 \cos 2\, \pi\, t \\ &- 0.408 \operatorname{sen} 2\, \pi\, t - 0.072 \cos 3\, \pi\, t\ 0.202 \operatorname{sen} 3\, \pi\, t - 0.198 \operatorname{sen} 4\, \pi\, t \\ &+ 0153 \operatorname{sen} 5\, \pi\, t - 0.138 \operatorname{sen} 6\, \pi\, t + 0.117 \operatorname{sen} 7\, \pi\, t] \end{aligned}$$

La aproximación obtenida se ilustra en la figura 4.

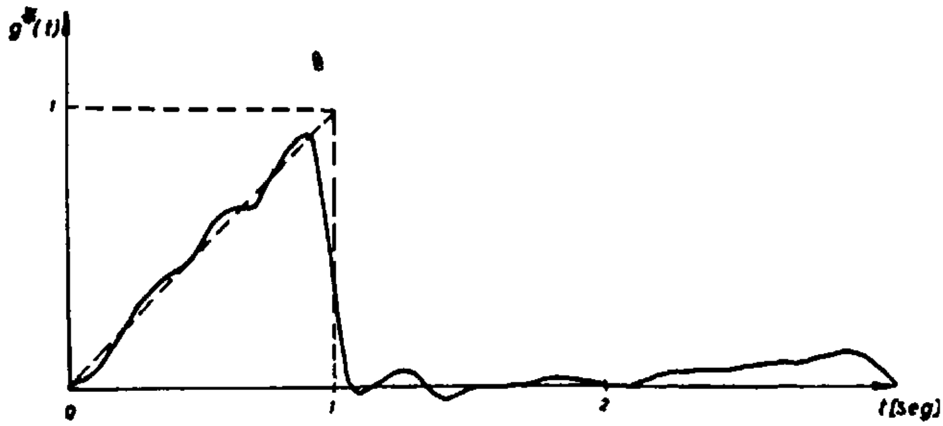

Fig. 4

Aproximación de un pulso triangular.

Se desea aproximar un pulso triangular simétrico de altura 0.5 y duración 1 segundo, el que se muestra en la figura 5.

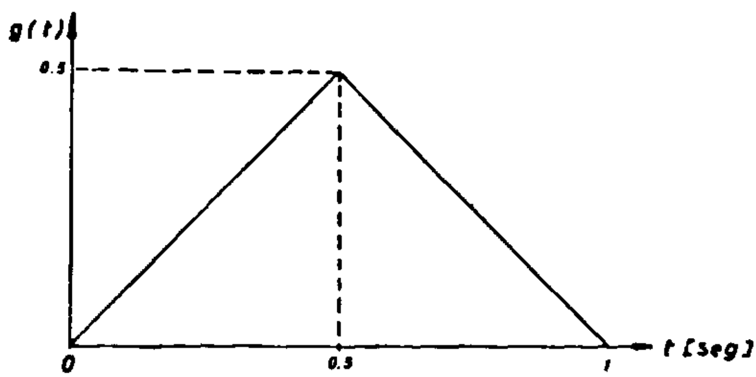

Fig. 5

La función $g(t)$ está definida por:

$$\begin{cases} g(t) = t & (0 < t < 0.5) \\ g(t) = 1 - t & (0.5 < t < 1) \\ g(t) = 0 & (t > 1) \end{cases}$$

En este caso conviene elegir $\tau = 1$ segundo, $\alpha = 2$ y $g_1(t) = g(t)$ para todo t. La función periódica $h(t)$ de período $\tau = 1$ segundo está definida por:

$$h(t) = (1-t)\, e^{2t} \qquad (0.5 < t < 1)$$

O sea

$$\begin{cases} h(t) = t\, e^{2t} & (0 < t < 0.5) \\ h() = e^{2t}\, g_1 t() = e^{2t}\, g(t) & (0 < t < 1) \end{cases}$$

con lo cual se cumple la condición $h(O^+) = h(\tau^-)$ pues

$$h(O^+) = e^{2t}\, g(O^+) = O \text{ y } h(\tau^-) = e^{2t}\, g(1^-) = O$$

El desarrollo de $h(t)$ en serie de Fourier tiene la forma conocida:

Los coeficientes valen:

$$A_0 = \frac{2\pi}{2\pi} \int_0^1 h(t)\, dt = \int_0^{0.5} t\, e^{2t}\, dt + \int_{0.5}^{1} (1\text{-}t)\, e^{2t}\, dt + 0.74$$

$$A_n = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 h(t) \cos 2\pi t\, dt = 2 \int_1^{0,5} t\, e^{2t} \cos 2\pi n t\, dt +$$

$$2 \int_{0,5} (1 - t)\, e^{2t} \cos 2\pi n t\ dt$$

$$A_n = (-1)\ \frac{32\pi e n}{[4 + 4(\pi n)^2]^2} - \frac{}{[4 + 4(\pi n)^2]^2} - \frac{}{[4 + 4(\pi n)^2]^2}$$

$$B_n = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^1 h(t) \operatorname{sen} 2\pi n t\, dt = 2 \int_0^{0,5} t\, e^{2t} \operatorname{sen} 2\pi n t\, dt +$$

$$2 \int_{0.5}^{1} (1 - t)\, e^{2t} \operatorname{sen} 2\pi n t\, dt$$

$$B_n = (-1)^{n+1}\ \frac{4e\,[4 - 4(\pi n)^2]}{[4 + 4(\pi n)^2]^2} + \frac{2\,[4 - 4(\pi n)^2]}{[4 + 4(\pi n)^2]^2}$$

$$\frac{2e^2\,[4 - 4(\pi n)^2]}{[4 + 4(\pi n)^2]^2}$$

Tomando los términos de la serie de Fourier hasta $n = 5$, se obtiene:

$A_0 = 0{,}74$	
$A_1 = -\ 0{,}521$	$B_1 = -\ 0{,}369$
$A_2 = -\ 0{,}035$	$B_2 = -\ 0{,}0114$
$A_3 = -\ 0{,}085$	$B_3 = -\ 0{,}0161$
$A_4 = -\ 0{,}008$	$B_4 = -\ 0{,}0015$
$A_5 = -\ 0{,}0027$	$B_5 = -\ 0{,}0037$

Por lo tanto:

$$g_1^*(t) = e^{-s}h^*(t) = e^{-st}\,[0.74 - 0.521 \cos 2\pi t - 0.369 \operatorname{sen} 2\pi t -$$

$$0.035 \cos 4\pi t - 0.0114 \operatorname{sen} 4\pi t - 0.085 \cos 6\pi t -$$

$$0.0161 \operatorname{sen} 6\pi t - 0.008 \cos 8\pi t - 0.0015 \operatorname{sen} 8\pi t -$$

$$0.0027 \cos 10\pi t - 0.0037 \operatorname{sen} 10\pi t]$$

El resultado se muestra en la figura 6.

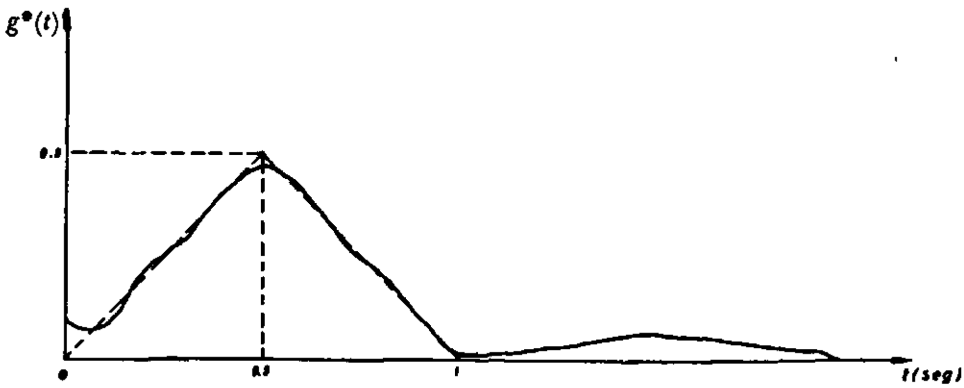

Fig. 6

APROXIMACION DE UN PULSO RECTANGULAR

El pulso se muestra en la figura 7.

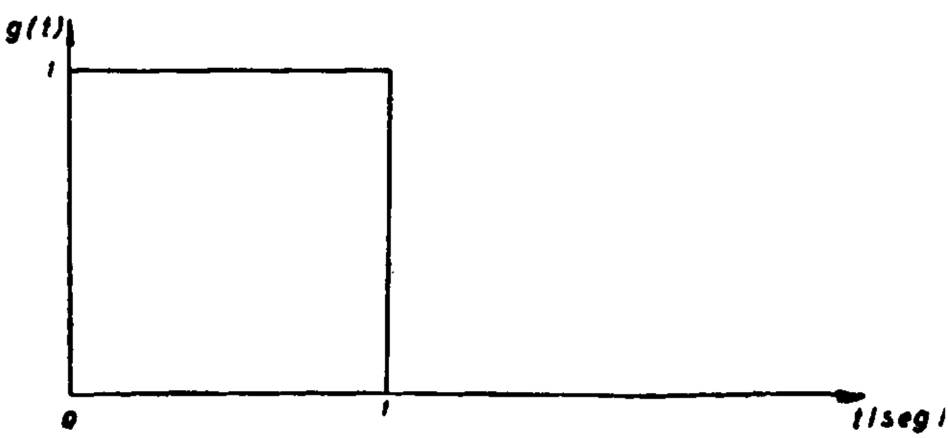

Fig. 7

La función $g(t)$ está definida por:

$$g(t) = 1 \qquad (0 < t < 1)$$

$$g(t) = 0 \qquad (t > 1)$$

Elíjase $\tau = 2$ segundos y

$$\begin{cases} g_1(t) = g(t) & (0 < t < 1) \\ g_1(t) = (t-1)\, e^{-\alpha t} & (t > 1) \end{cases}$$

La función periódica $h(t)$ de período $\tau = 2$ segundos está definida por: $h(t) = e^{\alpha t}\, g_1(t) \qquad (0 < t < 2)$

o sea,

$$\begin{cases} h(t) = e^{\alpha t} & (0 < t < 1) \\ h(t) = (t-1) & (1 < t < 2) \end{cases}$$

Con la elección anterior se cumple la condición $h(0^+) = h(\tau^-)$ pues:

$h(0^+) = g_1(0^+) = 1 \quad 1 \quad h(\tau^-) = e^{2\alpha}\, g_1(2^-) = e^{2\alpha}\,(2-1)\, e^{-2\alpha} = 1\,.$

Los coeficientes de la serie de Fourier valen:

$$A_0 = \frac{\pi}{2\pi}\int_0^2 h(t)dt = \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^{\alpha t}\, dt + \tfrac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\, dt$$

$$A_0 = \frac{1}{2\alpha}\,(e^{\alpha} - 1) + \tfrac{1}{4}$$

$$A_n = \frac{\pi}{\pi}\int_0^2 h(t)\cos n\pi t\, dt = \int_0^1 e^{\alpha t}\cos n\pi t\, dt + \int_1^2 (t-1)\cos n\eta t\, dt$$

$$A_n = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (n\pi)^2}\left[(-1)^n e^{\alpha} - 1\right] + \frac{1}{(n\pi)^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

$$B_n = \frac{\pi}{\pi}\int_0^2 h(t)\,\mathrm{sen}\, n\pi t\, dt = \int_0^1 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\, n\pi t\, dt + \int_1^2 (t-1)\,\mathrm{sen}\, n\pi t\, dt$$

$$B_n = \frac{\pi n}{\alpha^2 + (\pi n)^2}\left[(-1)^{n+1} e^{\alpha} + 1\right] - \frac{1}{\pi n}$$

de A_0, A_n y B_n se obtiene:

$A_0 = 1{,}105$	
$A_1 = -\,0{,}141$	$B_1 = 0{,}757$
$A_2 = 0{,}043$	$B_2 = -\,0{,}426$
$A_3 = -\,0{,}019$	$B_3 = 0{,}284$
$A_4 \approx 0$	$B_4 = -\,0{,}213$
$A_5 \approx 0$	$B_5 = 0{,}172$
$A_6 \approx 0$	$B_6 = -\,0{,}144$
$A_7 \approx 0$	$B_7 = 0{,}124$

Por lo tanto:

$$g_1^*(t) = e^{-t}h^*(t) = e^{-t}\,[1{,}105 - 0{,}141 \cos \pi t + 0{,}757 \operatorname{sen} \pi t + 0{,}043 \cos 2\pi t$$
$$- 0{,}426 \operatorname{sen} 2\pi t - 0{,}019 \cos 3\pi t + 0{,}284 \operatorname{sen} 3\pi t - 0{,}213 \operatorname{sen} 4\pi t$$
$$+ 0{,}172 \operatorname{sen} 5\pi t - 0{,}144 \operatorname{sen} 6\pi t + 0{,}124 \operatorname{sen} 7\pi t]$$

La figura 8 muestra la aproximación obtenida.

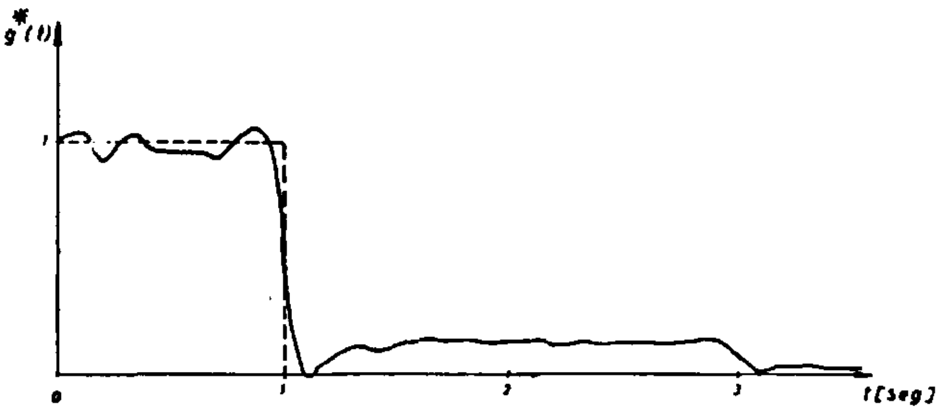

Fig. 8

En el ejemplo anterior se eligió $h(t)$, de tal modo que se cumpliera la condición $h(0^+) = h(\tau^-)$. Para apreciar la conveniencia de que dicha condición se cumpla se resolverá el problema sin tomar dicha precaución.

La función $g(t)$ está definida igual que antes por:

$$\begin{cases} g(t) = 1 & (0 < t < 1) \\ g(t) = 0 & (t > 1) \end{cases}$$

La función periódica $h(t)$ de período $\tau = 2$ segundos está definida por:

$$h(t) = e^{t}\, g_1(t) = e^{t} g(t) \qquad (0 < t < 2)$$

o sea,

$$\begin{cases} h(t) = e^{t} & (0 < t < 1) \\ h(t) = 0 & (1 < t < 2) \end{cases}$$

En este caso:

$$h(0^+) = 1$$
$$h(\tau^-) = 0$$
$$\therefore h(0^+) \neq h(\tau^-)$$

El desarrollo de Fourier da los siguientes resultados:

$$A_0 = \frac{\pi}{2\pi}\int_{1}^{2} h(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{t}\,dt$$

$$A_0 = \frac{1}{2\,\alpha}\,(e^{\alpha} - 1)$$

$$A_n = \frac{\pi}{\pi}\int_0^2 h(t)\cos n\,\pi\,t\,dt = \int_0^1 e^{\alpha t}\cos n\,\pi\,t\,dt$$

$$A_n = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (n\,\pi)^2}\,[(-1)\,e^{\alpha} - 1]$$

$$B_n = \frac{\pi}{\pi}\int_0^2 h(t)\,\mathrm{sen}\,n\,\pi\,t\,dt = \int_0^1 e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\,n\,\pi\,t\,dt$$

$$B_n = \frac{\pi\,n}{\alpha^2 + (\pi\,n)^2}\,[(-1)^{n+1}\,e^{\alpha} + 1]$$

Tal como en el caso anterior, elíjase $\alpha = 1$. Introduciendo los valores $n = 1, 2, \dots 7$ en las expresiones de A_0, A_n y B_n se obtiene:

$A_0 = 0{,}86$	
$A_1 = -\,0{,}342$	$B_1 = 1{,}075$
$A_2 = 0{,}043$	$B_2 = -\,0{,}267$
$A_3 = -\,0{,}041$	$B_3 = 0{,}39$
$A_4 \approx 0$	$B_4 = -\,0{,}136$
$A_5 \approx 0$	$B_5 = 0{,}236$
$A_6 \approx 0$	$B_6 = -\,0{,}091$
$A_7 \approx 0$	$B_7 = 0{,}169$

Por lo tanto:

$$g_1(t) = e^{-t}h^*(t) = e^{-t}\,[0{,}86 - 0{,}342\cos\pi t + 1{,}075\,\mathrm{sen}\,\pi t + 0{,}043\cos 2\,\pi t$$
$$-\,0{,}267\,\mathrm{sen}\,2\,\pi t - 0{,}041\cos 3\,\pi t + 0{,}39\,\mathrm{sen}\,3\,\pi t - 0{,}136\,\mathrm{sen}\,4\,\pi t$$
$$+\,0{,}236\,\mathrm{sen}\,5\,\pi t - 0{,}091\,\mathrm{sen}\,6\,\pi t + 0{,}169\,\mathrm{sen}\,7\,\pi t]$$

La aproximación que resulta se ilustra en la figura 9.

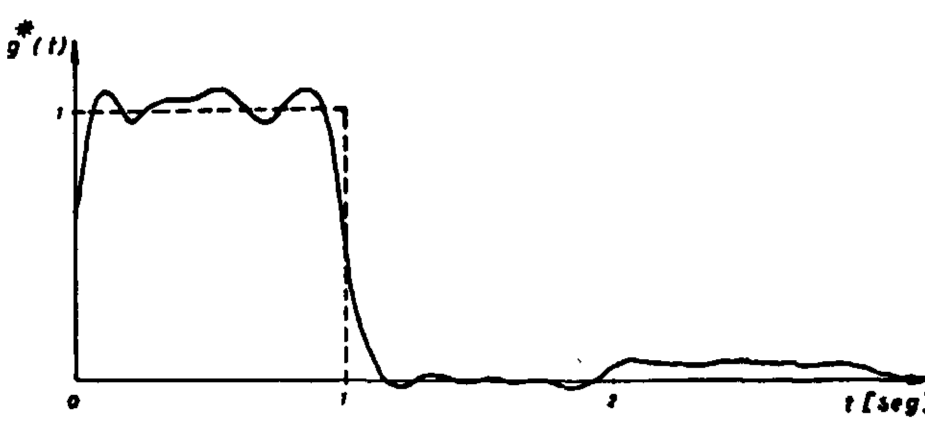

Fig. 9

La aproximación obtenida en la figura 8 para el intervalo que interesa ($0 < t < 1$) es mejor. Se hace notar que si interesara aproximar $g(t)$ para todo t habría dudas en cuanto a cuál resultado es más conveniente, ya que cuando se mejora la aproximación en $t = 0$ se empeora para $t > 1$.