INTRODUCCION AL METODO DIRECTO DE LYAPUNOV

Ing. Renato Gadenz N.

INTRODUCCION AL METODO DIRECTO DE LYAPUNOX

Ing. Renato Gadenz N.
Sección Alta Tensión y
Máquinas. I.I.E.E.

RESUMEN

Se hace una breve reseña de los fundamentos del Método Directo de Lyapunov, método destinado principalmente al estudio de la estabilidad de los sistemas de control nolineal.

Se indica las características del método, las propiedades de una función de Lyapunov, los tipos de sistemas a los cuales el método se puede aplicar y los teoremas básicos que relacionan la estabilidad de dichos sistemas y las funciones de Lyapunov que para ellos se puedan determinar. El método se ilustra mediante ejemplos sencillos.

Se hace notar también que el método puede proporcionar una cierta medida del error del sistema, teniendo valor potencial para la síntesis de sistemas óptimos.

ABSTRACT

A brief review of the fundamentals of the Lyapunov's Direct Method is presented. This method is mainly concerned with the study of stability of nonlinear control systems.

The characteristics of the method, the properties of a Lyapunov function and the types of systems to which the method can be applied as well as the basic theorems relating the stability of a system and the Lyapunov functions which can be determined for it, are indicated. Simple examples illustrate the method.

It is also noted that the Lyapunov's Method may give a certain measure of system error, thus being of interest in optimum system design.

El problema de la estabilidad de los sistemas de control, especialmente de los sistemas nolineales, ha recibido gran atención en los últimos años y se ha atacado haciendo uso de un nuevo método: el Método Directo de Lyapunov*. Este método, basado en el trabajo realizado en el siglo pasado por el matemático ruso A. M. Lyapunov, no requiere la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales que caracterizan el sistema, sino que permite abordar "directamente" el problema, basándose en la forma de dichas ecuaciones. Se trata de determinar una función escalar $V(x_i)$, que tiene ciertas características especiales y que, si existe, asegura la estabilidad del sistema en un cierto dominio del espacio definido por las variables de estado x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Para sistemas nolineales hay varios tipos de estabilidad. Teóricamente, el caso más seguro ocurre cuando el sistema es globalmente asintóticamente estable. Estabilidad asintótica es una propiedad de un estado de un sistema que, cuando es perturbado, vuelve asintóticamente al estado no perturbado a medida que el

*También conocido en la literatura como Segundo Método de Lyapunov.

tiempo crece indefinidamente. Si esto ocurre para cualquier perturbación inicial, sin importar lo grande que sea, este estado del sistema se llama globalmente asintóticamente estable.

Una función de Lyapunov V tiene las siguientes características principales:

1) **Es positiva definida en la región de estabilidad asintótica alrededor del estado de equilibrio $\underline{x}_e$, elegido por simplicidad como origen del espacio de estado, o sea, $V(\underline{x}) > 0$ para todo $\underline{x} \neq \underline{x}_e = \underline{0}$ y $V(\underline{x}_e) = V(\underline{0}) = 0$***

2) **Su derivada total con respecto al tiempo, $\dot{V}$, es negativa definida en la misma región, o sea, $\dot{V}(\underline{x}) < 0$ para todo $\underline{x} \neq \underline{x}_e = \underline{0}$ y $\dot{V}(\underline{x}_e) = \dot{V}(\underline{0}) = 0$****

El Método Directo de Lyapunov se aplica sólo a sistemas dinámicos libres, en que "libre" significa que "no hay función forzante que sea función explícita del tiempo". También, en particular, se consideran sistemas estacionarios, en que "estacionario" significa que "no depende explícitamente del tiempo". Un sistema libre y estacionario es invariante con una translación en el tiempo y se llama autónomo. Una expresión general para una clase de estos sistemas es un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

donde f_i pueden ser funciones lineales o no lineales de las variables x_i que describen el estado del sistema, y se suponen continuas y diferenciables. Además se tiene $f_i\,(O, O \ldots . O) = O$; el origen es un estado de equilibrio; ahí todas las derivadas x_i son simultáneamente nulas***.

Hasta ahora no hay métodos definidos para obtener una función de Lyapunov para todos los casos, aunque se conocen diversas técnicas para tratar de determinarla. Además, la función de Lyapunov no es única, en general. Sin embargo, si se encuentra una función de Lyapunov V_1 que garantiza estabilidad asintótica para un estado de equilibrio de un sistema en una cierta región Ω_1 del espacio de estado, dicho estado de equilibrio es realmente asintóticamente estable en esa región. Pero puede haber otra función de Lyapunov V_2 que asegura estabilidad asintótica en otra región Ω_2 que puede incluir parcial o totalmente la región Ω_1. Asimismo, si se encuentra una función escalar V_3 que es positiva definida en cierta región Ω_3 alrededor del estado de equilibrio (origen del espacio de estado), pero tal que V_3 puede tomar valores positivos arbitrariamente cerca de dicho estado, indicando por lo tanto que se trata de un estado de equilibrio inestable, dicho estado de equilibrio es realmente inestable. Para siste-

---

*$\underline{x}$ es un vector cuyas componentes x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ son las variables que describen el estado del sistema. El espacio definido por dichas variables se llama espacio de estado.

**Para estabilidad "débil", no asintótica, $\dot{V}$ necesita ser sólo negativa semidefinida, i.e.: $\dot{V}\,(\underline{x}) \leq O$ para todo $\underline{x} \neq \underline{x}_e = O$ y $\dot{V}\,(\underline{O}) = O$.

***Los estados de equilibrio están definidos por el sistema de ecuaciones $f_i = O$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Si la solución de este sistema da un estado de equilibrio diferente del origen, se hace, por conveniencia, una transformación de coordenadas para llevar dicho estado de equilibrio al origen del nuevo espacio de estado. Si hay más de un estado de equilibrio se analiza cada uno separadamente, siguiendo el proceso indicado arriba, o sea, haciendo en cada caso la transformación de coordenadas correspondiente.

mas no globalmente asintóticamente estables puede interesar la determinación del contorno de la zona de estabilidad asintótica en el espacio de estado. Este es, en general, un problema difícil; pero una aproximación por defecto puede ser suficiente.

Un problema que aparece en la determinación de la función de Lyapunov es la comprobación de que es positiva definida. Sólo se conocen las condiciones necesarias y suficientes para polinomios de segundo grado y para casos particulares de polinomios de cuarto grado. (Un polinomio de primer grado no puede ser función de Lyapunov). Si se tiene una función polinomio de grado superior a dos, cuya parte cuadrática es positiva definida, dicha función es una función de Lyapunov por lo menos en una zona suficientemente pequeña alrededor del estado de equilibrio (origen) siempre que las condiciones para $\dot{V}$ se cumplan en esa zona. El problema de la determinación de que una función es positiva (negativa) definida es más difícil cuando se estudia la estabilidad global, pues, para ese caso, se requiere una función V positiva definida con $\dot{V}$ negativa definida para todo el espacio de estado. Esto lleva al uso, cuando es posible, de formas restringidas pero convenientes para V y $\dot{V}$, como formas cuadráticas o sumas de productos de formas cuadráticas.

Para ilustrar la aplicación del método, considérese un ejemplo sencillo, de solución conocida.

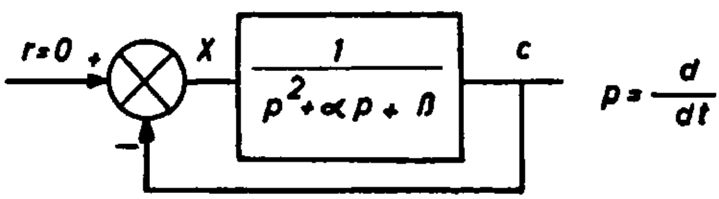

Fig. 1

La ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + (\beta + 1)x = 0$$

El sistema es lineal y es table para $\alpha > 0$; $\beta > -1$.
Para determinar la estabilidad por el método de Lyapunov se hace la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 \\ \dot{x} = \dot{x}_1 = x_2 \end{array}\right\}$$

y se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_2 - (\beta + 1) x_1 \end{array}\right\}$$

Haciendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ se obtiene: $x_1 = x_2 = 0$, o sea, el origen del espacio (plano, en este caso) de estado es el estado de equilibrio. Elíjase una función $V(x)$ cuadrática de la forma:

$$V = \underline{x}'\,\underline{Q}\,\underline{x} = q_{11}\,x_1^2 + 2q_{12}\,x_1\,x_2 + q_{22}\,x_2^2$$

en que $\underline{x}'$ = vector $\underline{x}$ transpuesto = $[x_1\ \ x_2]$

y $\underline{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz simétrica.

Las condiciones para que V sea positiva definida son

$$q_{11} > 0$$
$$q_{11}\ q_{22} - q_{12}^2 > 0$$

Elíjase además $\dot{V} = -\phi = -x_1^2 - x_2^2$ que es negativa definida.

Los coeficientes q_{ij}'s deben determinarse de modo que satisfagan las condiciones de arriba y además la siguiente relación, llamada ecuación de Zubov:

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,\dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\,f_i\,(\underline{x}) = -\phi(\underline{x}) = \dot{V}(\underline{x})$$

Por lo tanto se tiene:

$$(2q_{11}\ x_1 + 2q_{12}\,x_2)\,x_2 + (2q_{12}\,x_1 + 2q_{22}\,x_2)\,[-\alpha\,x_2 - (\beta + 1)\,x_1] =$$
$$= -x_1^2 - x_2^2$$

o sea, igualando coeficientes a ambos lados,

$$\left.\begin{array}{l} 2q_{11} - 2q_{12}\ \alpha - 2q_{22}\ (\beta + 1) = 0 \\ 2q_{12} - 2q_{22}\ \alpha \qquad\qquad\qquad = -1 \\ -\ 2q_{12}\ (\beta + 1) \qquad\qquad\quad = -1 \end{array}\right\}$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{l} q_{12} = \dfrac{1}{2(\beta + 1)} \\[2ex] q_{22} = \dfrac{\beta + 2}{2\alpha\,(\beta + 1)} \\[2ex] q_{11} = \dfrac{\alpha^2 + (\beta + 1)^2 + \beta + 1}{2\alpha(\beta + 1)} \end{array}\right\}$$

Las condiciones para que V sea positiva definida se cumplen para

$$\alpha > 0, \ \beta > -1.$$

Luego para ese rango de valores de los parámetros α y β, la función de Lyapunov existe y está dada por:

$$V = \frac{\alpha^2 + (\beta+1)^2 + (\beta+1)}{2\alpha(\beta+1)} x_1^2 + \frac{1}{\beta+1} x_1 x_2 + \frac{\beta+2}{2\alpha(\beta+1)} x_2^2$$

Por lo tanto, para $\alpha > 0$, $\beta > -1$, el sistema es globalmente asintóticamente estable (o simplemente estable, por tratarse de un sistema lineal), lo que concuerda con lo determinado por otros métodos.

Un ejemplo en que aparece una nolinealidad se indica a continuación:

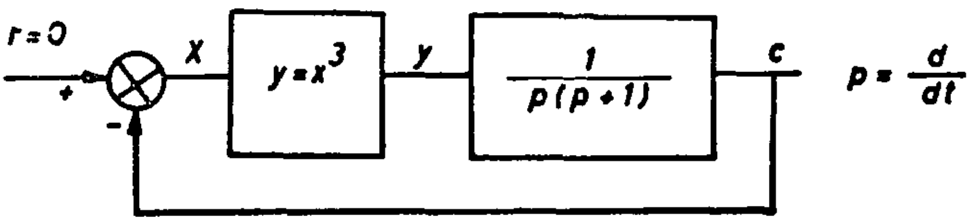

Fig. 2

La ecuación diferencial es:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0$$

Haciendo la sustitución

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x} &= \dot{x}_1 = x_2 \end{aligned}\right\}$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3 \end{aligned}\right\}$$

El origen del espacio (plano) de estado es el estado de equilibrio.

Eligiendo $\varphi = -\dot{V} = x_1^4 + x_2^2$

y suponiendo V de la forma:

$$V = q_{11} x_1^2 + 2q_{12} x_1 x_2 + q_{22} x_2^2 + \delta_{40} x_1^4 + \delta_{41} x_1^3 x_2$$
$$+ \delta_{42} x_1^2 x_2^2 + \delta_{43} x_1 x_2^3 + \delta_{44} x_2^4$$

se obtiene, por un proceso análogo al del ejemplo anterior,

$$\left.\begin{array}{l} q_{11} = q_{12} = \dfrac{1}{2} \\ q_{22} = 1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \delta_{40} = \dfrac{1}{2} \\ \delta_{41} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{44} = 0 \end{array}\right\}$$

o sea,

$$V = \frac{x_1^4}{2} + \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + x_2^2$$

Las condiciones para que V sea positiva definida se cumplen, pues el coeficiente de x_1^4 es positivo y la parte cuadrática de V cumple las condiciones:

$$q_{11} > 0, \quad q_{11} q_{22} - q_{12}^2 > 0.$$

Luego el sistema es globalmente asintóticamente estable.

Para concluir, diremos que el Método Directo de Lyapunov es útil no sólo para estudios de estabilidad, sino que puede tener gran valor para síntesis de sistemas.

Es interesante notar que el método puede proporcionar una cierta medida del error del sistema. Consideraciones de diseño pueden dirigirse hacia la minimización de esta medida o, en general, hacia una optimización del sistema en ese sentido. Identifíquese, por ejemplo, $\phi = -\dot{V}$, que es una función positiva definida de las variables de estado, con un criterio de error, y considérese la expresión, $I = \int_0^\infty \phi \, dt$ como índice de calidad del sistema. Esta integral es un número positivo para todo sistema asintóticamente estable y puede servir como factor de mérito del sistema. La integral I se obtiene inmediatamente si la función V es conocida, pues $I = V(\underline{x}_o)$, $\underline{x}_o$ es un vector, como componentes x_{io} $(i = 1, 2, \ldots n)$, que caracteriza la perturbación inicial en el espacio de estado. Esto puede demostrarse como sigue: Dado que $\phi = -\dot{V}$,

$$I = \int_0^\infty \phi \, dt = \int_0^\infty -\dot{V} \, dt = V(\underline{x}) \big|_{t=0} - V(\underline{x}) \big|_{t=\infty}$$

que, para sistemas asintóticamente estables, se reduce a

$$V(\underline{x}) \big|_{t=0} = V(\underline{x}_o), \quad \text{pues} \quad V(\underline{x}) \big|_{t=\infty} = V(\underline{0}) = 0.$$

Es de notar que si el criterio de error ϕ se elige a priori, la función de Lyapunov que de allí se determine es única y, por lo tanto, lo mismo ocurre con I. Este índice de calidad es función de las condiciones iniciales y de los parámetros del sistema. El proceso de optimización del sistema con respecto a estos parámetros es entonces posible.

BIBLIOGRAFIA

1. KALMAN, R. E. y BERTRAM, J. E., "Control System Analysis and Design Via the 'Second Method' of Lyapunov, I. Continous-Time Systems", Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, junio, 1960.

2. LASALLE, J. y LEFSCHETZ, S., "Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications", Academic Press, New York, 1961.

3. LI, C. C., "An Introduction to Lyapunov's Direct Method and Pontryagin's Maximum Principle", Technical Report Nº 14, Department of Electrical Engineering, University of Pittsburgh, 1962.

4. AIEE Nonlinear Control Subcommittee, "Workshop Session on Lyapunov's Second Method", editado por L. F. Kazda, University of Michigan, Industry Program of the College of Engineering, Ann Arbor, Michigan, Septiembre, 1960.

En estas referencias se puede encontrar bibliografía adicional sobre el tema.