EL TENSOR ADMITANCIA DE LA MAQUINA GENERALIZADA

Ing. Gastón Pesse Vidal

EL TENSOR ADMITANCIA DE LA MAQUINA GENERALIZADA

Ing. Gastón Pesse Vidal
Sección Alta Tensión y
Máquinas. I.I.E.E.

RESUMEN

Las ecuaciones de movimiento de una máquina eléctrica generalizada se deducen aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la función Lagrangeano. Esta función depende de coordenadas generalizadas que se deben identificar con las variables eléctricas y mecánicas de la máquina.

Se discute aquí la forma de efectuar dicha identificación de modo que en la ecuación de movimiento que relaciona las variables eléctricas, aparezca el tensor admitancia.

Los parámetros que ligan las variables se definen para una máquina bifásica con enrollados cuya distribución de conductores es sinusoidal.

Las variables enlaces de flujo se expresan en función de los voltajes y se deduce el tensor inductancias inversas, constituyente del tensor admitancia.

ABSTRACT

The motion equations of an electric generalized machine are deduced by applying the Euler-Lagrange equations to the Lagrangean function. This function depends on generalized coordinates which must be identified with the electrical and mechanical variables of the machine.

The way to make such identification so that the admittance tensor appears in the motion equation that relates the electrical variables, is discussed here.

The parameters that link the variables, are defined for a two-phase machine with windings whose conductor distribution is sinusoidal.

The flux linkages are expressed in terms of the voltages and the inverse inductance tensor, constituent of the admittance tensor, is deduced.

Los problemas dinámicos que se presentan en la operación de la maquinaria eléctrica, no pueden ser estudiados en general con los modelos y circuitos equivalentes establecidos para el caso estacionario o régimen permanente. En vez de hacer ciertas modificaciones a estos circuitos, que permitan realizar algunos estudios dinámicos limitados, se utilizan actualmente las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema electromecánico en estudio. Estas ecuaciones son deducidas a partir del concepto de máquina generalizada, introduciendo las ligazones que definan la máquina particular en estudio.

Es necesario entonces establecer primero las ecuaciones de movimiento de la máquina generalizada. En general, se deducen para una máquina bifásica, ya que no se pierde generalidad al tener sólo dos ejes de los enrollados, debido a que cualquier número de enrollados equilibrados, se pueden reducir siempre al caso bifásico.

Se supone, además, que la máquina cuenta en cada eje con un enrollado en el rotor y otro en el estator. Para ciertas máquinas reales, es necesario suponer un mayor número de enrollados, como es el caso de los enrollados amortiguadores de las máquinas síncronas. Este segundo enrollado se omite normalmente en la deducción de las ecuaciones de movimiento de la máquina generalizada, debido a que los nuevos términos que aparecen al suponer más enrollados, son idénticos en forma a los de la máquina generalizada más simple.

La elección de las coordenadas generalizadas utilizadas en la deducción de las ecuaciones de movimiento, se realiza normalmente de tal manera que las ecuaciones resultan de la forma

$$v_\alpha = Z_{\alpha\beta}\, i^\beta \tag{1}$$

$$T_e = i^\alpha\, G_{\alpha\beta}\, i^\beta \tag{2}$$

donde v_α y T_e son, respectivamente, el tensor voltaje en los terminales de la máquina, y el torque eléctrico en el eje; $Z_{\alpha\beta}$ y $G_{\alpha\beta}$ los tensores de impedancia y de torque, y por último, i^α y i^β son el tensor corriente en los enrollados.

Esta formulación de las ecuaciones de movimiento es la clásica. Una de sus mayores ventajas reside en el hecho de que los tensores componentes del tensor impedancia, son los tensores resistencia e inductancia de la máquina. Estos valores son más fáciles de medir, en la práctica, que los valores de las conductancias e inductancias inversas, necesarios para una formulación a través del tensor admitancia. Por estas razones, se prefiere normalmente no usar en la práctica este segundo tipo de formulación. A lo anterior se añade el hecho de que tradicionalmente los datos referentes a las máquinas, sus circuitos equivalentes, ecuaciones, etc., siempre se han deducido en forma de tensor impedancia, aun antes que los métodos generalizados fueran desarrollados, lo cual facilita también este tipo de formulación.

La formulación de las ecuaciones de movimiento, utilizando el tensor admitancia, presenta ventajas en ciertos problemas, debido a que las operaciones necesarias para despejar las variables dependientes, son en ellos más sencillas de realizar.

En efecto, si las ecuaciones de movimiento están expresadas en función del tensor impedancia, las variables independientes son los voltajes. Las corrientes, que aparecen como variables dependientes, se deben despejar de la ecuación matricial:

$$[v_\alpha] = \boxed{Z_{\alpha\beta}}\, [i^\beta] \tag{3}$$

donde $Z\alpha\beta$ es el tensor impedancia.

La inversión de la matriz de $Z\alpha\beta$ no es sencilla, ya que en el caso general las ecuaciones diferenciales de movimiento no son lineales.

En la ecuación de movimiento, expresada mediante el tensor admitancia, las variables independientes son las corrientes aplicadas a los enrollados. Las variables dependientes, en este caso los voltajes, deben ser despejadas de la ecuación matricial

$$[j^{\alpha}] = \boxed{Y^{\alpha\beta}}\ [v_{\beta}] \qquad (4)$$

donde $Y^{\alpha\beta}$ es el tensor admitancia.

Si las condiciones o ligazones del sistema son tales que están dados un mayor número de voltajes que de corrientes, es más sencillo operar con la matriz de admitancia, ya que será necesario realizar menor número de operaciones para despejar las variables dependientes.

Las ecuaciones de movimiento expresadas en función del tensor admitancia, las deduciremos a partir del principio de Hamilton. Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la máquina, las obtendremos reemplazando en las ecuaciones de Euler-Lagrange, los valores correspondientes para el Lagrangeano.

Es necesario entonces, en primer término, revisar las variables que intervienen en el fenómeno y asignar coordenadas generalizadas a estas variables, de manera de obtener una representación que utilice el tensor admitancia.

Para tener una mejor base de comparación entre ambas formulaciones, se han indicado, en los cuadros siguientes, las variables que corresponden a las coordenadas generalizadas en ambas representaciones.

A.) Formulación basada en suponer la energía electrostática como energía potencial y la energía magnética como energía cinética. Conduce a la ecuación de movimiento en función de la matriz impedancia.

COORDENADAS GENERALIZADAS	VARIABLES ELECTRICAS	VARIABLES MECANICAS
Conservativas:		
q_k	$\hat{q}_k$	ϕ
$\dot{q}_k$	j_k	$\dot{\phi}$
p_k	λ_k	$J\dot{\phi}$
f_k	v_k	$K\phi$
No conservativas:		
$Q_k(t)$	$e_k(t)$	$T(t)$
Parámetros de Fricción:		
r_k	r_k	α

ϕ es el ángulo del eje de la máquina; J, el momento de inercia; K, el módulo de torsión; $\hat{q}_k$, la carga eléctrica; λ_k, el enlace de flujo con el enrollado k, y j_k la corriente en el enrollado k.

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para un Lagrangeano expresado en función de las coordenadas q_k y $\dot{q}_k$ anteriormente elegidas, se deducen finalmente las ecuaciones de equilibrio para los diferentes ejes coordenados.

Las ecuaciones de movimiento para los ejes eléctricos serán

$$\frac{d\,[\lambda\,(\phi, j)]}{dt} + j\,r = e\,(t) \tag{5}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial j}\,\frac{dj}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial \phi}\,\frac{d\phi}{dt} + j\,r = e\,(t) \tag{6}$$

Esta es la ecuación de Kirchoff para voltajes de bucle como variables independientes.

Para el eje mecánico se tendrá la ecuación

$$\frac{d}{dt}\,(J\,\dot{\phi}) + \alpha\dot{\phi} + K\phi - \frac{\partial}{\partial \phi}\,\left[\int_0^j \lambda\,(j, \phi)\,dj\right] = T(t) \tag{7}$$

El último término del primer miembro de esta ecuación, representa el torque eléctrico.

B.) En la formulación que nos conducirá a expresar las ecuaciones de movimiento en función de la matriz de admitancia, se considera la energía magnética como energía potencial y la energía electrostática, como energía cinética.

Debemos entonces asignar nuevamente coordenadas generalizadas a las variables de la máquina. Pero solamente debemos modificar la correspondencia que se refiere a los ejes eléctricos, ya que las variables mecánicas las podemos seguir asignando a las mismas coordenadas anteriores. Esto es debido a que solamente hemos modificado las coordenadas referentes a la energía eléctrica y magnética, y no las correspondientes a la energía mecánica.

Las variables corresponderán a las coordenadas generalizadas según el siguiente cuadro:

COORDENADAS GENERALIZADAS	VARIABLES ELECTRICAS	VARIABLES MECANICAS
Conservativas:		
q_k	λ_k	ϕ
$\dot{q}_k$	v_k	$\dot{\phi}$
p_k	$\tilde{q}_k$	$J\dot{\phi}$
f_k	j_k	$K\phi$
No conservativas:		
$Q_k(t)$	$i_k(t)$	$T(t)$
Parámetros de Fricción:		
r_k	g_k	α

Para deducir las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange, debemos, en primer término, expresar el Lagrangeano de la máquina en función de las coordenadas generalizadas anteriormente asignadas, y de los parámetros que describen el sistema.

Aplicaremos la expresión de la ecuación de Euler-Lagrange para sistemas no conservativos y con elementos disipativos.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} + Q_k = 0 \qquad (8)$$

donde $L = \bar{T} - V$ es el Lagrangeano del sistema; $\bar{T}$ es la coenergía cinética; V es la energía potencial, y F, la función disipativa. La coenergía cinética estará dada por la siguiente expresión:

$$T = \int_{0 \dots 0}^{\dot{q}_1 \dots \dot{q}_N} \sum_{k=1}^{N} p'_k (q_1 \dots q_N ;\ \dot{q}'_1 \dots \dot{q}'_N ;\ t)\, d\dot{q}'_k \qquad (9)$$

En esta expresión p_k es por definición el momentum generalizado, y el acento sobre las variables del sistema indica cuáles de ellas varían durante el proceso de integración.

La energía potencial estará dada por

$$V = \int_{0 \dots 0}^{q_1 \dots q_N} \sum_{k=1}^{N} - f'_k (q'_1 \dots q'_N ;\ t)\, dq'_k \qquad (10)$$

donde f_k es por definición la fuerza generalizada.

Finalmente, la función de disipación será

$$F = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} r_k (\dot{q}_k)^2 \qquad (11)$$

El principal problema es entonces expresar las variables p_k y f_k en función de las variables del sistema, de acuerdo a la correspondencia de éstas con las coordenadas generalizadas.

Según la correspondencia que conduce a la matriz de admitancia, el momentum generalizado p_k corresponde a $\tilde{q}_k$ (cargas eléctricas en los ejes eléctricos) y a $J\dot{\phi}$ en el eje mecánico.

Será necesario entonces expresar solamente $\tilde{q}_k$ en función de las coordenadas $(\lambda_1 \dots \lambda_N, \phi)$, de las velocidades $(v_1 \dots v_N, \dot{\phi})$ y de t; ya que en el eje mecánico la relación está dada en forma explícita.

La carga eléctrica $\tilde{q}_k$ no va a ser función de λ_k para circuitos eléctricos en régimen de muy lenta variación, como es el que tiene lugar en la maquinaria eléctrica. Solamente será función de v_i ya que la velocidad $\dot{\phi}$ es lo suficientemente pequeña para no afectar a la carga eléctrica.

La relación entre v_i y $\tilde{q}_k$ estará dada por la ecuación:

$$\tilde{q}_k = \sum_{i=1}^{N} C_{ki}\, v_i \qquad (12)$$

Estos coeficientes serán funciones del ángulo mecánico ϕ.

En una máquina eléctrica estos coeficientes capacitivos entre los enrollados son lo suficientemente pequeños para no tener influencia en el comportamiento de la máquina, por lo que podemos suponer que $C_{kl} = O$. Por lo tanto, las cargas eléctricas no van a contribuir, como variables del sistema, a la coenergía cinética de éste, y sólo lo hará la variable mecánica $\dot{\phi}$.

Las fuerzas generalizadas f_k debemos expresarlas en función de las coordenadas generalizadas q_k y del tiempo, a través de la correspondencia con las variables del sistema.

Para los ejes coordenados eléctricos, tendremos que f_k corresponde a j_k y es necesario expresar estas corrientes en función de λ_k, ϕ y t. En el eje mecánico la fuerza generalizada está en forma explícita.

La relación entre j_k y λ_k, ϕ y t la estableceremos a través de los parámetros inductancia inversa. Estos parámetros nos permiten escribir relaciones.

$$j_k = \sum_{l=1}^{N} \tau_{kl} (\phi, t) \lambda_l$$

En esta relación, τ_{kl} será función del ángulo ϕ y del tiempo, pero en la máquina generalizada los circuitos se suponen rígidos, por lo que los parámetros serán sólo función del ángulo ϕ.

Esta relación entre las corrientes j_k y los enlaces de flujo λ_l, determinará el comportamiento de la máquina a través de las ecuaciones de movimiento.

Las ecuaciones de movimiento para la máquina generalizada, las deduciremos aplicando la ecuación de Euler-Lagrange al Lagrangeano expresado en función de las coordenadas generalizadas anteriormente especficadas.

La máquina generalizada la supondremos constituida por cuatro ejes coordenados eléctricos y uno mecánico.

Los ejes eléctricos serán los ejes *a* y *b* del rotor y estator. Tanto los ejes *a* y *b* del rotor como los del estator serán radiales y formarán entre sí un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes. El ángulo ϕ del eje mecánico respecto al estator lo definiremos como el ángulo que forman los ejes "*a*" del rotor y estator.

Para los cinco ejes de la máquina generalizada, las coordenadas tendrán la siguiente correspondencia:

COORDENADAS GENERALIZADAS	$k = 1$ EJE "a" ESTATOR	$k = 2$ EJE "b" ESTATOR	$k = 3$ EJE "a" ROTOR	$k = 4$ EJE "b" ROTOR	$k = 5$ EJE MECANICO ROTOR
Conservativas:					
q_k	λ_{sa}	λ_{sb}	λ_{ra}	λ_{rb}	ϕ
$\dot{q}_k$	—	—	—	—	$\dot{\phi}$
p_k	—	—	—	—	$J\dot{\phi}$
f_k	j_{sa}	j_{sb}	j_{ra}	j_{rb}	$K\phi$
No conservativas:					
Q_k	$i_{sa}(t)$	$i_{sb}(t)$	$i_{ra}(t)$	$i_{rb}(t)$	$T(t)$

En este cuadro no hemos incluido las variables eléctricas v_k y $\tilde{q}_k$, correspondientes a las generalizadas $\dot{q}_k$ y p_k.

Por las razones anteriormente expuestas, las capacidades entre enrollados son lo suficientemente pequeñas para que estas variables no intervengan en el comportamiento de la máquina. Intervienen solamente los enlaces de flujo λ_k y las corrientes en los enrollados j_k. La primera de estas variables la consideramos independiente, ya que deduciremos las ecuaciones de movimiento a partir del Lagrangeano, el cual es función de q_k y $\dot{q}_k$.

Usamos la letra j para distinguir las corrientes de los enrollados, que serán variables conservativas, de las aplicadas en los nudos $i(t)$, que serán independientes y no conservativas.

Para mayor claridad en la formulación del Lagrangeano, y en la deducción posterior de las ecuaciones de movimiento, vamos a desarrollar las matrices correspondientes a los tensores que intervienen en esta formulación.

Coordenadas y velocidades generalizadas.

Serán las variables independientes de la parte conservativa.

Coordenadas generalizadas.

$$\left[q_k\right] = \begin{array}{rc} & 1 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda_{sa} \\ \lambda_{sb} \\ \lambda_{ra} \\ \lambda_{rb} \\ \phi \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{rc} & 1 \\ \begin{array}{r} 1,2,3,4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} \lambda^{s,r}_{ab,ab} \\ \phi \end{bmatrix} \end{array} \qquad (14)$$

La submatriz $\lambda^{s,r}_{ab,ab}$ representa los enlaces de flujo para los ejes a y b del estator s, y para los a y b del rotor r, los cuales hemos numerado de *1* a *4*. El eje *5* es el mecánico.

Velocidades generalizadas.

$$\left[\dot{q}_k\right] = \begin{array}{rc} & 1 \\ \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} v_{sa} \\ v_{sb} \\ v_{ra} \\ v_{rb} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (15)$$

Desarrollamos a continuación, las matrices de parámetros que describen la máquina, indicando previamente la relación funcional correspondiente.

Matriz de "elasticidad".

$$\left[f_k\right] = \boxed{K} \left[q_k\right] \tag{16}$$

$$\left[j_k\right] = \boxed{\zeta} \left[\lambda_k\right] \tag{17}$$

$$\boxed{K} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \zeta^{ss}_{aa} & \zeta^{ss}_{ab} & \zeta^{rs}_{aa} & \zeta^{rs}_{ab} & 0 \\ 2 & \zeta^{ss}_{ba} & \zeta^{ss}_{bb} & \zeta^{rs}_{ba} & \zeta^{rs}_{bb} & 0 \\ 3 & \zeta^{sr}_{aa} & \zeta^{sr}_{ab} & \zeta^{rr}_{aa} & \zeta^{rr}_{ab} & 0 \\ 4 & \zeta^{sr}_{ba} & \zeta^{sr}_{bb} & \zeta^{rr}_{ba} & \zeta^{rr}_{bb} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|c:c|} & 1,2,3,4 & 5 \\ \hline 1,2,3,4 & \zeta^{s,r}_{ab,ab} & 0 \\ \hdashline 5 & 0 & K_m \\ \hline \end{array} \tag{18}$$

Matriz de conductancia.

$$F = \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2} r_k (\dot{q}_k)^2 \qquad \text{Función de Rayleigh}$$

$$F = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_k\right]^t \boxed{R} \left[\dot{q}_k\right] \tag{19}$$

$$
\boxed{R} = \begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & G_a^s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & G_b^s & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & G_a^r & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & G_b^r & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc|}
 & 1,2,3,4 & 5 \\
\hline
1,2,3,4 & G^{sr}_{ab,ab} & 0 \\
5 & 0 & \alpha \\
\hline
\end{array}
\qquad (20)
$$

Matriz de "inercia".

$$
\left[p_k \right] = \boxed{M} \left[\dot{q}_k \right] \qquad (21)
$$

$$
\boxed{M} = \begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc|}
 & 1,2,3,4 & 5 \\
\hline
1,2,3,4 & 0 & 0 \\
5 & 0 & J_m \\
\hline
\end{array}
\qquad (22)
$$

Las fuerzas y momenta generalizados aparecerán como variables conservativas dependientes. Desarrollaremos las matrices correspondientes, indicando su dependencia de las coordenadas y velocidades generalizadas que se han considerado como independientes.

Fuerzas generalizadas.

$$
[f] = \begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\!\!
\begin{array}{c}
1 \\
\left[\begin{array}{c} f_a^s \\ f_b^s \\ f_a^r \\ f_b^r \\ K\theta \end{array}\right]
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\
\hline
1,2,3,4 & f^{s,r}_{ab,ab} \\
5 & K\theta \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|cc|}
 & 1,2,3,4 & 5 \\
\hline
1,2,3,4 & \zeta^{s,r}_{ab,ab}(\theta) & 0 \\
5 & 0 & K \\
\hline
\end{array}
\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\
\hline
1,2,3,4 & \lambda^{s,r}_{ab,ab} \\
5 & \theta \\
\hline
\end{array}
\qquad (23)
$$

Momenta generalizados.

$$
[p] = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \end{array}\!\!\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1,2,3,4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ J\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{array}
$$

(24)

Nos falta desarrollar la matriz de las fuerzas externas al sistema, que serán independientes, funciones del tiempo, y no conservativas.

Fuerzas no conservativas generalizadas.

$$
[Q] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} i_a^s \\ i_b^s \\ i_a^r \\ i_b^r \\ f \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ 1,2,3,4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} 1 \\ \begin{bmatrix} i_{ab,ab}^{s,r} \\ f \end{bmatrix} \end{array}
$$

(25)

Desarrolladas las matrices de los tensores que intervienen en el problema, debemos establecer el Lagrangeano de la máquina generalizada.

El Lagrangeano es, por definición

$$
L = \bar{T} - V \qquad (26)
$$

donde $\bar{T}$ es la coenergía cinética y V es la energía potencial.

Revisemos las definiciones de estos dos factores, para los cinco ejes de la máquina generalizada.

$$T = \int_{0\dots0}^{\dot q_1 \dots \dot q_s} \sum_{k=1}^{s} p'_k \, (q_1 \dots q_s ; \; \dot q'_1 \dots \dot q'_s \, ; \; t) \; d\dot q'_k \tag{27}$$

$$V = \int_{0\dots0}^{q_1 \dots q_s} \sum_{k=1}^{s} -f'_k \, (q'_1 \dots q'_s ; \; t) \; dq'_k \tag{28}$$

Para el caso de la máquina generalizada se pueden hacer varias simplificaciones debido a que en varios ejes algunas variables no intervienen.

Por otra parte se pueden separar las integrales, ya que las variables mecánicas no dependen de las eléctricas.

Con estas consideraciones, la coenergía cinética $\overline{T}$ y la energía potencial V estarán expresadas por:

$$T = \int_{00000}^{0000\dot\phi} (J \, \dot\phi) \, d\dot\phi = \frac{1}{2} \, J \, \dot\phi^2 \tag{29}$$

$$V = \int_{0000}^{\lambda^e_a \lambda^e_b \lambda^r_a \lambda^r_b} \sum_{k=1}^{4} - j'_k \; (\lambda'^e_a \, , \lambda'^e_b \, , \lambda'^r_a , \lambda'^r_b \, ; \; \phi) \, d\lambda'_k + \int_0^{\phi} - K_m \, \phi \, d\phi \tag{30}$$

Luego el único término que tiene cierta complicación en su evaluación es la primera integral de la energía potencial, donde está considerada la contribución de los ejes eléctricos.

Como hemos supuesto una relación lineal entre los enlaces de flujo y las corrientes, expresada por la ecuación

$$\left[j^{e,r}_{ab,ab} \right] = \boxed{r^{e,r}_{ab,ab}} \; \left[\lambda^{e,r}_{ab,ab} \right] \tag{31}$$

tendremos que la componente de la energía potencial V_e, dada por los ejes eléctricos, será:

$$V_e = \int_{0000}^{\lambda^e_a \lambda^e_b \lambda^r_a \lambda^r_b} \sum_{k=1}^{4} - j'_k \; d\lambda'_k \tag{32}$$

$$V_e = - \int_{0000}^{\lambda^e_a \lambda^e_b \lambda^r_a \lambda^r_b} \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{r=1}^{4} r_{kr} \; \lambda'_r \right) d\lambda'_k \tag{33}$$

$$V_e = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \sum_{r=1}^{4} r_{kr} \; \lambda_r \, \lambda_k \tag{34}$$

Expresando esta ecuación en forma de matriz:

$$V_e = -\frac{1}{2}\left[\lambda^{s,r}_{ab,ab}\right]^t \boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)} \left[\lambda^{s,r}_{ab,ab}\right] \tag{35}$$

Luego:

$$V = V_e - \frac{1}{2} K_m \phi^2 \tag{36}$$

El Lagrangeano $L = \overline{T} - V$ quedará expresado por:

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left[\lambda^{s,r}_{ab,ab}\right]^t \boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)} \left[\lambda^{s,r}_{ab,ab}\right] + \frac{1}{2} K_m \phi^2 \tag{37}$$

Debemos expresar la función de disipación de Rayleigh en términos de las variables independientes.

Como

$$F = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} r_i (\dot{q}_i)^2 \tag{38}$$

tendremos que para la máquina generalizada hemos considerado como parámetros disipativos, r_i, las conductancias $G^{s,r}_{ab,ab}$ en paralelo con los enrollados; luego:

$$F = \frac{1}{2} G^{s}_{a,a}(v^{s}_{a})^2 + \frac{1}{2} G^{s}_{b,b}(v^{s}_{b})^2 + \frac{1}{2} G^{r}_{a,a}(v^{r}_{a})^2 + \frac{1}{2} G^{r}_{b,b}(v^{r}_{b})^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[v^{s,r}_{ab,ab}\right]^t \boxed{G^{s,r}_{ab,ab}} \left[v^{s,r}_{ab,ab}\right] + \frac{1}{2}\alpha\dot{\phi}^2 \tag{39}$$

Las ecuaciones de movimiento se deducen aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al Lagrangeano L de la ecuación (37), a la función de disipación F según ecuación (39), y a las fuerzas no conservativas Q que actúan sobre cada coordenada generalizada:

La ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5 \tag{40}$$

Analicemos cada uno de sus términos para las cinco coordenadas generalizadas; las cuatro eléctricas $k = 1, 2, 3, 4$ y la mecánica $k = 5$.

El término $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ va a ser nulo para las coordenadas eléctricas ya que L no depende del voltaje v_k, que es la velocidad generalizada $\dot{q}_k$, correspondiente a los cuatro ejes eléctricos.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{41}$$

Para el eje mecánico, $k = 5$, tendremos:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right|_{k=5} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = j\,\dot{\phi} \tag{42}$$

Los ejes eléctricos no intervienen en esta derivada, ya que en ellos el parámetro $\tau(\phi)$ es función de ϕ, como variable independiente y no de $\dot{\phi}$.

Tendremos entonces, para el primer término de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \qquad \text{para } k = 1, 2, 3, 4 \tag{43}$$

$$= J\,\ddot{\phi} \qquad \text{para } k = 5 \tag{44}$$

El segundo término $\frac{\partial L}{\partial q_k}$ de la ecuación de Euler-Lagrange, tendrá la siguiente expresión:

Para los ejes eléctricos:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_{k=1,2,3,4} = \frac{\partial L}{\partial \lambda k} = \frac{1}{2}\,(2\ \boxed{r^{a,r}_{ab,ab}(\phi)}\ [\lambda^{a,r}_{ab,ab}] \tag{45}$$

Para el eje mecánico $k = 5$:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q_k}\right|_{k=5} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{1}{2}\,[\lambda^{a,r}_{ab,ab}]^t\,\frac{d}{d\phi}\boxed{r^{a,r}_{ab,ab}(\phi)}[\lambda^{a,r}_{ab,ab}] + \frac{1}{2}\,2k\phi \tag{46}$$

El tercer término $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ nos permitirá valorar las fuerzas de origen disipativo que obran en el sistema.

Para los ejes eléctricos:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}\right|_{k=1,2,3,4} = \frac{\partial F}{\partial v_k} = \frac{1}{2}\,2\ \boxed{G^{a,r}_{ab,ab}}\ [v^{a,r}_{ab,ab}] \tag{47}$$

donde v_k aparece en forma explícita, ya que es una variable conservativa independiente, que no hemos considerado sólo por ser pequeñas las capacidades de la máquina, pero que influye a través de los términos disipativos.

Para el eje mecánico $k = 5$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}\right|_{k=5} = \frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{1}{2}\,2\,\alpha\,\dot{\phi} \tag{48}$$

Reagrupando estos términos para formar la ecuación de Eular-Lagrange, tendremos las ecuaciones de equilibrio de fuerzas generalizadas, para los diferentes ejes, tanto eléctricos como mecánicos.

Para los ejes eléctricos $k = 1,2,3,4$:

$$0 = \boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}\,[\lambda^{s,r}_{ab,ab}] + \boxed{G^{s,r}_{ab,ab}}\,[v^{s,r}_{ab,ab}] - [i^{s,r}_{ab,ab}] \tag{49}$$

Para el eje mecánico $k = 5$:

$$J\ddot{\phi} - \frac{1}{2}[\lambda^{s,r}_{ab,ab}]^t \boxed{\frac{dr^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}{d\phi}}[\lambda^{s,r}_{ab,ab}] + K\phi + \alpha\dot{\phi} = T \tag{50}$$

La ecuación (49) es una ecuación de equilibrio de corrientes, donde el primer término corresponde a las corrientes ligadas a los enlaces de flujo de la máquina y el segundo término corresponde a las corrientes disipativas.

Las corrientes del segundo miembro son las aplicadas al nudo correspondiente, las cuales se identifican con las de los terminales de la máquina, ya que no hemos introducido ninguna ligazón entre ellos.

La ecuación (50) es una ecuación de equilibrio de torques. El primer término corresponde al torque de inercia. El segundo corresponde al torque producido por la conversión de energía eléctrica a mecánica. El tercer término corresponde al torque debido a la elasticidad del eje, y el cuarto término corresponde al torque debido a la fricción.

En el segundo miembro tenemos el torque T aplicado al eje, al que hemos considerado variable independiente.

Las ecuaciones de movimiento (49) y (50) están expresadas en función de los enlaces de flujo $\lambda^{s,r}_{ab,ab}$ de los enrollados. Es necesario expresar estas ecuaciones en función de los voltajes $v^{s,r}_{ab,ab}$ en los enrollados de la máquina, ya que éstas son las variables usadas en la práctica para el análisis de sistemas. Además, esta transformación es necesaria para obtener el tensor admitancia $\gamma^{s,r}_{ab,ab}$

Como los terminales de la máquina se identifican con los de los enrollados, ya que en el circuito equivalente usado las pérdidas están representadas por conductancias $G^{r,s}_{ab,ab}$ en paralelo, la relación entre estos enlaces de flujo y los voltajes estará dada por la ecuación

$$\lambda^{s,r}_{ab,ab} = \int_0^t v^{s,r}_{ab,ab}\, dt \tag{51}$$

Si suponemos que los enlaces de flujo son nulos para $t = O$, esta relación la podemos escribir

$$\lambda^{s,r}_{ab,ab} = \frac{1}{p}\, v^{s,r}_{ab,ab} \qquad \left(p = \frac{d}{dt}\right) \tag{52}$$

La ecuación de movimiento en los ejes eléctricos queda expresada, en función de $v^{s,r}_{ab,ab}$, por la siguiente ecuación:

$$\boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}\,\frac{1}{p}[v^{s,r}_{ab,ab}] + \boxed{G^{s,r}_{ab,ab}}\,[v^{s,r}_{ab,ab}] = [i^{s,r}_{ab,ab}] \qquad (53)$$

$$\left(\boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}\,\frac{1}{p} + \boxed{G^{s,r}_{ab,ab}}\right)[v^{s,r}_{ab,ab}] = [i^{s,r}_{ab,ab}] \qquad (54)$$

Como hemos mantenido la notación de subíndices para las matrices, podemos escribir:

$$\boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)\,\frac{1}{p} + G^{s,r}_{ab,ab}}\,[V^{s,r}_{ab,ab}] = [i^{s,r}_{ab,ab}] \qquad (55)$$

La matriz

$$[Y^{s,r}_{ab,ab}] = \boxed{r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)\,\frac{1}{p} + G^{s,r}_{ab,ab}} \qquad (56)$$

nos expresa el tensor admitancia de la máquina generalizada para los ejes eléctricos holonómicos ligados a los enrollados.

Para el eje mecánico, la ecuación de movimiento expresada en función de $v^{s,r}_{ab,ab}$, será:

$$J\,\ddot{\phi} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,[v^{s,r}_{ab,ab}]^t\,\boxed{\frac{d\,r^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}{d\phi}}\,\frac{1}{p}\,[v^{s,r}_{ab,ab}] + K\phi + \alpha\,\dot{\phi} = T \qquad (57)$$

Si comparamos las ecuaciones de movimiento de los ejes eléctricos (53) con las correspondientes al usar el tensor impedancia, podemos observar que en este último caso tendremos:

$$[v^{s,r}_{ab,ab}] = \boxed{R^{s,r}_{ab,ab}}\,[i^{s,r}_{ab,ab}] + p\,\boxed{L^{s,r}_{ab,ab}}\,[i^{s,r}_{ab,ab}] \qquad (58)$$

El operador p opera en este caso sobre el producto de $L^{s,r}_{ab,ab}$ e $i^{s,r}_{ab,ab}$ que es equivalente a los enlaces de flujo $\lambda^{s,r}_{ab,ab}$

En las derivaciones correspondientes intervienen, tanto las derivadas respecto al tiempo de las corrientes, como del ángulo mecánico, ya que la derivada total la podemos expresar

$$p\,(L^{s,r}_{ab,ab}\,i^{s,r}_{ab,ab}) = L^{s,r}_{ab,ab}\,\frac{d}{dt}(i^{s,r}_{ab,ab}) + \dot{\phi}\,\frac{\partial L^{s,r}_{ab,ab}}{\partial\phi}\,i^{s,r}_{ab,ab} \qquad (59)$$

donde el primer término corresponde al voltaje llamado de "transformación" y el segundo, al voltaje de "rotación".

En la ecuación (53) vemos que el operador $\frac{1}{p}$ actúa solamente sobre los voltajes $v^{s,r}_{ab,ab}$ y no sobre los parámetros de la máquina, por lo que no aparecen derivadas de las posiciones angulares en la representación mediante el tensor admitancia.

Para tener en forma explícita la ecuación de movimiento, es necesario determinar la matriz de inductancias inversas en función del ángulo mecánico ϕ.

Estos parámetros se pueden determinar directamente de consideraciones energéticas en el entrehierro de la máquina, pero por ser esta deducción bastante extensa la dejaremos para desarrollarla en otra oportunidad.

Deduciremos la matriz de inductancias inversas, por inversión de la matriz de inductancias $L^{s,r}_{ab,ab}\ (\phi)$ que es conocida.

Llamando M a la inductancia mutua entre enrollados de rotor y estator, que suponemos igual en ambos ejes por simetría, y L^s y L^r a las inductancias de estator y rotor, respectivamente, esta matriz tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{L^{s,r}_{ab,ab}} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & L^s & 0 & M\cos\phi & -M\,\mathrm{sen}\,\phi \\ 2 & 0 & L^s & M\,\mathrm{sen}\,\phi & M\cos\phi \\ 3 & M\cos\phi & M\,\mathrm{sen}\,\phi & L^r & 0 \\ 4 & -M\,\mathrm{sen}\,\phi & M\cos\phi & 0 & L^r \\ \hline \end{array} \qquad (60)$$

El determinante principal de esta matriz vale

$$|L| = (L^s\ L^r - M^2)^2 = D^2 \qquad (61)$$

y la matriz inversa

$$\boxed{\Gamma^{s,r}_{ab,ab}(\phi)} = \boxed{L^{s,r}_{ab,ab}(\phi)}^{-1} = \frac{1}{(L^s\ L^r - M^2)} \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & L^r & 0 & -M\cos\phi & +M\,\mathrm{sen}\,\phi \\ 2 & 0 & L^r & -M\,\mathrm{sen}\,\phi & -M\cos\phi \\ 3 & -M\cos\phi & -M\,\mathrm{sen}\,\phi & L^s & 0 \\ 4 & +M\,\mathrm{sen}\,\phi & -M\cos\phi & 0 & L^s \\ \hline \end{array} \qquad (62)$$

Expresando en forma explícita la ecuación de movimiento, para todos los ejes eléctricos, mediante la expresión de $\tau(\phi)$, tendremos de la ecuación (55):

$$\begin{bmatrix} i_a^s \\ i_b^s \\ i_a^r \\ i_b^r \end{bmatrix} = \frac{1}{L^s L^r - M^2} \boxed{\begin{matrix} L_a^r \frac{1}{p} + DG_a^s & 0 & -M\cos\phi \frac{1}{p} & M \operatorname{sen}\phi \frac{1}{p} \\ 0 & L_s^r \frac{1}{p} + DG_b^s & -M\operatorname{sen}\phi \frac{1}{p} & -M\cos\phi \frac{1}{p} \\ -M\cos\phi \frac{1}{p} & -M\operatorname{sen}\phi \frac{1}{p} & L^s \frac{1}{p} + DG_a^r & 0 \\ +M\operatorname{sen}\phi \frac{1}{p} & -M\cos\phi \frac{1}{p} & 0 & L^s \frac{1}{p} + DG_b^r \end{matrix}} \begin{bmatrix} v_a^s \\ v_b^s \\ v_a^r \\ v_b^r \end{bmatrix} \tag{63}$$

Para el eje mecánico, tendremos la siguiente ecuación de movimiento, expresada en forma explícita en ϕ.

$$T = J\ddot{\phi} - \frac{1}{2(L^s L^r - M^2)} \begin{bmatrix} \frac{v_a^s}{p} & \frac{v_b^s}{p} & \frac{v_a^r}{p} & \frac{v_b^r}{p} \end{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & M\operatorname{sen}\phi & M\cos\phi \\ 0 & 0 & -M\cos\phi & M\operatorname{sen}\phi \\ M\operatorname{sen}\phi & -M\cos\phi & 0 & 0 \\ M\cos\phi & M\operatorname{sen}\phi & 0 & 0 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} \frac{v_a^s}{p} \\ \frac{v_b^s}{p} \\ \frac{v_a^r}{p} \\ \frac{v_b^r}{p} \end{matrix}} + K\phi + \alpha\dot{\phi} \tag{64}$$

Estas ecuaciones de movimiento son directamente aplicables a las diversas máquinas de la práctica.

Para mayor facilidad de análisis, es conveniente transformar estas ecuaciones a otros ejes de referencia, como ser los d, q; los γ, δ o los f, b.

Estas transformaciones, como el uso de las ecuaciones de movimiento en el estudio del comportamiento dinámico de la maquinaria eléctrica, las trataremos en una próxima publicación.