L. H. Claude

Sobre factores de las diversas formas de energías

EN un artículo anterior (N.° 9, Septiembre de 1928. de esta revista) expuse, sin entrar en mayores detalles, que el trabajo obtenido en una transformación elemental reversible de energía quedaba representado siempre por una ecuación de la forma:

$$d\tau = I_1\, d\varepsilon_1 + I_2\, d\varepsilon_2 + \ldots + I_n\, d\varepsilon_n \qquad (1)$$

en que cada término corresponde a una forma de energía. En esta expresión los factores I son las *intensidades*, mientras que los $d\varepsilon$ son los incrementos de las *extensidades* de cada forma de energía.

Las propiedades características de las extensidades son:

a) ser conservativas, o sea, indestructibles;

b) ser directamente sumables y, por tanto, mensurables.

Según esto, en toda transformación, la cantidad total de extensidad de cada energía queda invariable. Si intervienen fenómenos térmicos o energía radiante, es preciso agregar la condición de que la transformación sea reversible.

También se desprende de estas propiedades que, si se juntan dos extensidades iguales en magnitud y naturaleza, se obtiene una extensidad doble; por consiguiente, bastará con adoptar cierta cantidad de la extensidad considerada como unidad para poder medir una extensidad cualquiera de esta clase de energía.

En cambio, la propiedad fundamental de las intensidades es el no ser directamente sumables, se desprende de esto que tampoco son directamente mensurables; por lo tanto su medida o grandor sólo puede ser fijado indirectamente.

Esta definición de la intensidad, con la que se contentan los autores que conozco, no me satisface; desde luego tiene el inconveniente de toda definición basada en una cualidad negativa. A mi juicio, la propiedad fundamental de las intensidades es la de ser el factor determinante de los desplazamientos de la extensidad correspondiente, y por lo tanto, de los intercambios de energía. Esta propiedad o definición implica la usual conjuntamente con otras propiedades de la energía; en efecto:

1.° Para que se produzca un flujo de energía es indispensable la existencia de una diferencia de intensidad; por consiguiente se necesitan por lo menos 2 fuentes para el funcionamiento continuo de una máquina. (Principio de Carnot).

2.° Para que una cantidad de energía

pueda estar en equilibrio, la intensidad tiene que tener un valor uniforme en todas partes.

3.º Si se juntan dos cantidades de energía de la misma naturaleza, de diferente magnitud, pero igual intensidad, no puede haber ruptura de equilibrio y la intensidad permanece inalterada. (No sumabilidad de las intensidades).

A pesar de que ésta distinción entre extensidades e intensidades es fundamental en todo tratado de energética, es bastante curioso observar cómo divergen los autores cuando se trata de designar los factores en cada caso. En general, se limitan a ilustrar la definición de los dos tipos de factores con algunos ejemplos escogidos entre los casos clásicos y nada dicen de los demás o, si lo hacen, es en una forma superficial y parecen no advertir las dificultades con que va a tropezar el lector que procura seguirles.

En realidad, la determinación cualitativa de los factores de cada clase de energías no es un asunto tan sencillo como lo deja suponer el enunciado de sus definiciones. Para mostrarlo tomaré como base el cuadro siguiente:

Clase de energía	Intensidad	Extensidad
Trabajo mecánico	Fuerza	Desplazamiento
Elástica, alargamiento	Fuerza (Tracción)	Alargamiento
Elástica, torsión	Par de torsión	Angulo de torsión
Elástica, capilar	Tensión superficial	Superficie
Elástica, volumen	Presión	Volumen
Cinética	Velocidad	Cant. de movimiento
Gravífica	Potencial gravífico	Masa
Eléctrica, estática	Potencial eléctrico	Carga eléctrica
Eléctrica, dinámica	Fuerza E. M.	Cant. de electricidad
Química	Potencial químico	Masa
Térmica	Temperatura	Entropía térmica
Radiante	Frecuencia	Entropía radiante

Una simple inspección de este cuadro permite verificar inmediatamente la propiedad de sumabilidad de las extensidades, pero su «Conservación» o indestructibilidad no se evidencia sino en algunos casos.

Del mismo modo, la característica imposibilidad de sumar directamente las intensidades parece estar en contradicción manifiesta con el factor indicado como tal para varias formas de energía. En efecto, vemos figurar como intensidades a fuerzas, velocidades y pares o torques, cantidades que, según los principios más elementales de la mecánica, se suman como vectores, esto es, en conformidad a la llamada regla del paralelógramo.

El presente estudio tiene por objeto examinar las dificultades que se derivan de esta contradicción y demostrar, en lo posible, que ésta es solamente una apariencia.

* * *

En la energía electrostática no se presenta ninguna dificultad, pues los factores indicados cumplen exactamente con todas las condiciones. Igual cosa sucede con la energía elástica de volumen cuya intensidad, la presión, se suma en conformidad a la regla de Dalton. (Mezcla de gases en un volumen dado). Resulta casi innecesario hacer observar que su extensidad se conserva: en efecto, si se considera cierto volumen a una presión determinada, es preciso admitir la presencia de otro cuerpo elástico que lo rodee y cuya presión equilibra la del primero; entonces, a cada variación dv_1 del primero corresponde necesariamente una variación dv_2 del otro y tal que

$$dv = dv_1 + dv_2 = 0$$

Tampoco es motivo de dificultades la energía electrodinámica, pues la facilidad con que las pilas o dinamos pueden ser asociadas en serie no es un argumento en contra de la imposibilidad de sumar directamente las intensidades, en efecto, dicha regla rige solamente en el caso de justaposición de cantidades de la energía considerada. Ahora bien, ni las pilas ni los generadores eléctricos representan energía eléctrica acumulada sino que son simples transformadores que, a expensas de energía química acumulada en ellos, en el primer caso, o de energía mecánica exterior en el segundo, elevan el potencial de la electricidad que reciben. Son enteramente análogas a las bombas o compresoras que, también, pueden ser montadas en serie para producir un aumento de presión igual a la suma de los que cada una sería capaz de efectuar separadamente.

En cambio, en la energía cinética ya tropezamos con divergencias y dificultades. Desde luego, algunos autores (entre ellos W. Ostwald) indican para sus factores:

$$I = v^2 \quad ; \quad \varepsilon = m$$

lo que no me parece aceptable; en efecto, con estos factores no se verifica la fórmula general (1)

$$d\tau = I\, d \quad = mv \cdot dv$$

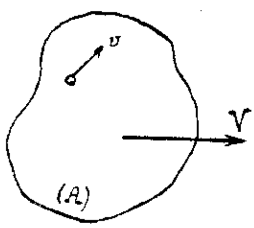
en cambio, los que se indican en el cuadro, además de cumplir con esta condición, tienen la ventaja de ser vectores, lo que cuadra mejor con los hechos que cantidades escalares como los factores anteriores.

Aceptada, esta descomposición, se verifica inmediatamente la propiedad de sumabilidad y de conservación o indestructibilidad de la extensidad *mv*, pues éste es uno de los principios de la mecánica; cuando un proyectil choca con la tierra su fuerza viva desaparece, pero la cantidad de movimiento del sistema tierra más proyectil permanece invariable.

Pero, ya se acepte a *v* o a v^2 como intensidad, subsiste la dificultad de que esta entidad es sumable geométricamente; sin embargo, basta un poco de reflexión para hacer desaparecer esta contradicción aparente.

Desde luego, debemos observar que no existe velocidad sin móvil dotado de inercia, de suerte que la regla del paralelógramo suma siempre cantidades de movimiento, y su aplicación a velocidades es solamente una ficción cómoda pero irrealizable. En efecto, todos los casos reales en que se aplica en esta forma esa regla, o bien se reducen a descomponer en sus componentes la velocidad de una misma masa, o bien equivalen a despreciar la velocidad que el sistema de referencia adquiere, como consecuencia del movimiento relativo.

Un ejemplo para aclarar esta aseveración: Sea el sólido (A), de masa M y de velocidad V, sobre el cual se desplaza un cuerpo masa *m* con la velocidad relativa *v*; es preciso distinguir dos casos.



1.° *La velocidad V se mide después que el móvil ha adquirido la velocidad relativa v.*

En este caso la fórmula

$$\vec{V_a} = \vec{v} + \vec{V} \qquad (2)$$

equivale a

$$m\vec{V_a} = m\vec{v} + m\vec{V},$$

esto es, a una descomposición según dos componentes, de la volocidad de una misma masa.

2.° *La velocidad V se determinó antes de que el móvil adquiriese la velocidad v respecto de A.*

En este caso, cuando el móvil ha adquirido su velocidad relativa *v*, si designamos por *x* e *y* los incrementos de velocidad absoluta del móvil y A, respectivamente, en la dirección de *v*, se tiene

$$x - y = v$$
$$mx + My = O$$

sistema que conduce a los valores

$$x = \frac{M}{m+M} v \qquad y - \frac{m}{m+M} v$$

Por lo tanto, después que se ha establecido la velocidad relativa *v*, la velocidad absoluta del móvil es

$$\vec{V_a} = \frac{M}{M+m} \vec{v} + \vec{V}$$

de suerte que la fórmula (2) no es aplicable sino en el caso de que m/M sea despreciable respecto de la unidad, como sucede cuando se toma a la tierra como sistema de referencia.

Se ve, pues, que en ninguno de los dos casos ha habido contradicción con la regla indicada: al unirse sistemas de distintas velocidades, la velocidad obtenida es tal que la suma de las cantidades de movimiento permanece inalterada. La fórmula que da el valor de esta velocidad resultante es enteramente análoga a la fórmula de Dalton. Por lo tanto, los factores *v* y *mv* indicados cumplen perfectamente con las condiciones impuestas.

Tal vez algunos lectores se encuentren sorprendidos por la falta de independencia de estos factores, cosa que no se observa con los factores *m* y v^2; sin embargo, este es un hecho absolutamente general. Así, por ejemplo, en la electrostática, la extensidad es

$$q = C V$$

esto es, la intensidad multiplicada por una constante, la «capacidad»: la analogía con los factores *v* y *mv* es completa.

Consideremos ahora las formas de energía en que intervienen *fuerzas;* estas pueden clasificarse en tres grupos:

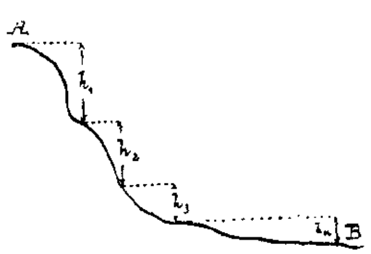
1.°) Las que se caracterizan por «acciones a distancia».

2.°) El trabajo mecánico.

3.°) Las energías de deformación de cuerpos sólidos.

Entre las primeras, tenemos a la energía electrostática, a la magnética y a la electromagnética, energías para las que la unanimidad de los autores designan como factores de intensidad y extensidad el potencial y la masa correspondientes, respectivamente. La lógica indica que debe hacerse lo mismo con la energía gravífica y no, como lo hace Ostwald, descomponerla en: altura, como intensidad, y peso, como extensidad, lo que, a mi juicio, presenta los inconvenientes siguientes: Primero, se rompe, sin justificación ninguna, la analogía con las otras energías cuyas fuerzas derivan de un potencial. En seguida, se hace aparecer como extensidad una fuerza y como intensidad la altura, o sea, el desplazamiento; por consiguiente, fuerza y desplazamiento desempeñarían en este caso un papel exactamente inverso del que les corresponde en el trabajo mecánico y en las energías del tercer grupo. Por fin, la extensidad elegida por Ostwald no se conserva, pues varía de un lugar a otro.

Además, debe observarse que la diferencia de altura entre dos puntos no es igual a la suma de las desnivelaciones parciales de los puntos intermediarios. En efecto, podría creerse que la diferencia de nivel entre dos puntos A y B, es la suma



$$\Sigma h = h_1 + h_2 + \ldots + h_n \;;$$

sin embargo, esta suma no tiene un valor determinado entre los puntos A y B: depende del camino que se siga entre ellos. En otras palabras, el valor de esta suma, aplicada a un circuito cerrado, es, en general, diferente de cero

En efecto: sean *a* y *b* los valores del potencial gravífico en A y B, y sean g_1, g_2, ..., g_n los valores de la aceleración de la gravedad en los puntos intermediarios. Si las alturas parciales son pequeñas, se tendrá

$$h_1 g_1 + h_2 g_2 + \ldots \; h_n g_n = a - b$$

y esta suma, que representa el trabajo correspondiente al traslado de la masa uno de A a B, es independiente del camino recorrido.

En lenguaje riguroso, solamente la integral

$$\int_A^B g \; dh = a - b$$

tiene un valor determinado; en cambio, la suma

$$\int_A^B dh$$

depende del camino recorrido entre los puntos A y B. Por esta razón se debe definir la diferencia de altura entre dos puntos por la suma

$$h_1 \frac{g_1}{g_0} + h_2 \frac{g_2}{g_0} + \ldots \; h_n \frac{g_n}{g_0} = \frac{a - b}{g_0}$$

en que g_0 representa el valor medio de *g* en la superficie del globo. Por consiguiente, para poder trazar las curvas de nivel en un plano, se necesita conocer el valor de *g* en la región que se estudia. Las alturas así definidas, que son proporcionales en cada punto al potencial gravífico, podrían servir para medir las intensidades (equivaldría a usar la escala $1/g_0$); pero no pueden utilizarse para este fin las distancias verticales sobre un plano de referencia, dadas por una nivelación.

He insistido sobre lo anterior, por cuanto las diferencias que parece presentar la energía gravífica con las otras del grupo I se deben a la simplificación introducida por la casi uniformidad práctica de su campo. Si, en cambio, se toman en cuenta sus variaciones producidas por la distribución de la materia, ya sea en la tierra misma o por la influencia de los cuerpos que se desplazan con respecto a ella, se encuentran leyes exactamente iguales a las que rigen el potencial eléctrico o magnético.

Por lo tanto, las energías que hemos clasificado en el primer grupo admiten todas como intensidad el potencial respectivo; por consiguiente, a pesar de que, como lo veremos más adelante, estas energías pueden transformarse en otras por intermedio de sus fuerzas de acción a distancia, esto no puede, hasta aquí, envolver contradicción alguna con las propiedades de las intensidades.

Pasaremos a considerar las energías en que las fuerzas tienen el carácter de intensidad, éstas son las del segundo y tercer grupos; en efecto, en ambos casos, la fuerza es el factor determinante del sentido en que escurre la energía, lo que basta para clasificarla eomo intensidad.

A pesar de su enorme importancia, nos detendremos poco en el segundo grupo, representado por el trabajo mecánico. En efecto, la misma frecuencia con que es necesario recurrir a este concepto en mecánica, hace que se pierda de vista su carácter «racional», es decir, artificial o antagónico a las condiciones de realización de los fenómenos naturales.

Desde luego, la producción de un «trabajo» supone que la fuerza actuante esté en todo momento equilibrada por otra fuerza antagónica igual y opuesta, lo que está en pugna con la posibilidad de realización de todo intercambio de energía. Por esta razón, en los fenómenos reales que más se acercan a esta condición, una de las fuerzas o ambas oscilan alrededor de su valor teórico, lo que da orígen a aceleraciones positivas y negativas del sistema, esto es, a aumentos y decrementos de su energía cinética, los que, en general, no son aprovechados.

En realidad, el concepto de «trabajo», aplicado a los fenómenos reales, es solamente una manera de calcular el valor de la cantidad de energía que pasa de una forma a otra; la energía no se almacena jamás bajo esta forma. No siendo el trabajo una energía verdadera, no tiene objeto estudiar si se le aplican o no las las leyes de la energética.

Pasaremos, entonces, a las energías del tercer grupo, es decir, las que se acumulan en los cuerpos sólidos deformados.

Consideremos un cuerpo que, bajo la acción de una fuerza que crece lentamente desde cero hasta un valor F, se deforma hasta que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza proyectado sobre ella llegue al valor s. El trabajo de deformación será, evidentemente,

$$\tau = \int F\,ds = \frac{1}{2} F s$$

si se admite que la reacción del sólido es función lineal de la deformación, lo que se verifica aproximadamente para deformaciones pequeñas (Ley de Hooke).

Ahora bien, es claro que la energía no se acumula en esta forma en el cuerpo deformado sino que se distribuye entre sus moléculas según la deformación de sus elementos, en conformidad a la fórmula de Kirchhoff:

$$\tau = \iiint G \left(\Sigma_x^2 + \Sigma_y^2 + \Sigma_z^2 + e^2 \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} + \right.$$
$$\left. + \frac{i_{xy}^2 + i_{yz}^2 + i_{zx}^2}{2} \right) d\,v$$

en la que

e : dilatación cúbica.
Σ : deformaciones normales, por unidad de longitud.
i : deformaciones angulares (de deslizamiento).
σ : coeficiente de Poisson.
G : coeficiente de elasticidad de deslizamiento . $G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$

Pero este trabajo puede expresarse también en función de las deformaciones y de las fatigas, y se obtiene así la expresión

$$\tau = \frac{1}{2} \iiint (n_x \Sigma_x + n_y \Sigma_y + n_z \Sigma_z + t_{xy} i_{xy} + $$
$$+ t_{yz} i_{yz} + t_{zx} i_{zx})\ d\,v$$

en que

$$\Sigma_x = \frac{1}{E}\ (n_x - \sigma\, n_y - \sigma\, n_z)$$

$$i_{xy} = \frac{t_{xy}}{G}$$

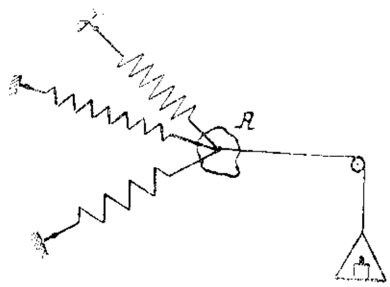
Ahora bien, si, como lo evidencian las fórmulas anteriores, el trabajo acumulado durante la deformación infinitamente pequeña de cada elemento es igual al producto de esta deformación por la resistencia que aquel le opone, es evidente que la energía total acumulada en el cuerpo tiene que tener una expresión análoga. Por consiguiente, la energía de deformación tendrá que ser homogénea con el producto de una fuerza multiplicada por un desplazamiento, es decir, tener la misma expresión que el trabajo mecánico; sólo nos falta descomponerla en sus factores de intensidad y extensidad.

Para esto basta con recordar lo que sucede al poner en contacto dos sólidos deformados; en tal caso se producen nuevas deformaciones y el contacto se establece según una o varias superficies, que son evidentemente iguales para ambos cuerpos en cada punto de contacto. En cada una de estas superficies, la distribución de las fatigas puede ser diferente para cada cuerpo, pero la proyección de su resultante sobre una dirección cualquiera tiene el mismo valor, pero signos diferentes, para ambos cuerpos. Más aún, la suma de las acciones moleculares que se desarrollan en una superficie cualquiera, ficticia, que divide el cuerqo en dos partes, es igual a la resultante de las acciones de contacto que se ejercen sobre la parte considerada.

Estas propiedades son características de una intensidad; por lo tanto, la intensidad de la energía de deformación es la fuerza (o par) que causa la deformación. Si se considera un desplazamiento cualquiera, real o virtual, la insidad correspondiente es la derivada de la energía con respecto al desplazamiento considerado (Teoremas de Castigliano).

Por consiguiente, nos encontramos en esta clase de energía con una intensidad que queda representada por una fuerza o un par, y tenemos que conciliar esto con la posibilidad de sumarse vectorialmente, que presentan estas fuerzas o pares.

En efecto, podemos asociar varios cuerpos deformados, resortes por ejemplo, de manera que actúen simultáneamente sobre un mismo cuerpo; sabemos que sus acciones se componen en conformidad con la regla del paralelógramo. Así, por ejemplo, la acción de los tres resortes de la figura sobre el cuerpo A podrá ser equilibrada por la de un hilo, dirigido según la resultante de las tensiones de los resortes, y sobre el que actúe un peso igual al valor de esta resultante.



Si en esta situación se corta el hilo, el cuerpo A experimentará, efectivamente, una aceleración igual a la suma geométrica de las aceleraciones que provocaría cada resorte separadamente. Sin embargo, esta experiencia que demuestra que las fuerzas, consideradas como causa de aceleración, se suman como vectores, no prueba en modo alguno que tengan que hacerlo en su carácter de intensidades de la energía acumulada en cada resorte.

Para verificar esta aseveración basta con estudiar detenidamente la manera cómo se realiza el experimento anterior, a partir de la energía previamente acumulada por deformación en los tres resortes. Para esto empezamos por sujetar las extremidades de cada resorte en un sólido de forma adecuada que lo mantenga en un estado de alargamiento tal que sus tracciones tengan los valores F_1, F_2, F_3; en este estado, enganchamos sus extremos en los soportes fijos y en el cuerpo A. Simultáneamente enganchamos el hilo, pero hacemos que el peso descanse sobre un soporte, de suerte que el hilo quede estirado, pero sin tensión inicial; la dirección del hilo entre (A) y la polea coincide con la dirección de la resultante de F_1, F_2 y F_3 y el peso coincide con el valor de esta resultante.

Si, ahora, se libera a los resortes, su energía se transmite al hilo, que, como todo cuerpo sólido, se deformará; en efecto, este cuerpo se encuentra en un estado de desequilibrio, pues su extremo izquierdo se encuentra sometido a la tracción resultante F, mientras que su extremo derecho no soporta esfuerzo alguno. Esta desigualdad de la intensidad de la energía de deformación origina un flujo de extensidad (deformación) en el sentido de las mayores intensidades; por lo tanto, cuando el equilibrio se haya establecido, el cuerpo A habrá experimentado un desplazamiento que, ha tenido por resultado acortar los resortes.

Sin necesidad de recurrir a un estudio cuantitativo del fenómeno, el que conduciría, otra vez, a una fórmula análoga a la de Dalton, se ve que la tensión de equilibrio del hilo diferirá en dirección y magnitud de la resultante F de las tensiones primitivas de los resortes y que su valor es *menor* que la suma geométrica de éstas. Queda, por lo tanto, demostrado que la intensidad de la energía de deformación, a pesar de tener la dimensión de una fuerza, cumple con todos los caracteres de intensidad.

En cuanto a la extensidad de las energías de este grupo, esto es, el desplazamiento o la deformación, su conservación es tan clara como la del volumen. En efecto, en todos los casos en que la fuerza debe ser considerada como intensidad, ella tiene que estar equilibrada por la reacción del sistema exterior (so pena de aparición de energía cinética); en este caso, todo desplazamiento de uno de los sistemas, esto es, de la intensidad considerada, queda compensado por otro igual y contrario de la reacción.

Para agotar el tema de las fuerzas, es preciso volver a considerar las energías que he clasificado en el primer grupo, esto es, las que se caracterizan por acciones a distancia. En efecto, en el estudio que hemos hecho de ellas las hemos considerado bajo un solo aspecto: el de la energía acumulada en cierta cantidad de la extensidad correspondiente, bajo un potencial que depende solamente de la cantidad de extensidad acumulada.

Este es el caso de un cuerpo conductor cargado de electricidad y libre de influencias, o de un estanque o represa, cuyo contenido puede escurrir hacia un nivel más bajo. En ambos casos, toda variación de la energía está ligada a un cambio de la extensidad

$$dU = I\, d\varepsilon$$

en conformidad a la fórmula general (1).

Pero estos sistemas, en que se originan «acciones a distancia», son susceptibles de acumular energía bajo otra forma, esto es, sin variación de la cantidad que hemos considerado, hasta ahora, como su extensidad. Esta energía especial depende de la posición relativa de los diversos cuerpos del sistema y, por esta razón, recibe el nombre de *energía de posición;* también se la llama energía potencial. Esto se observa en un conjunto de varios conductores electrizados o de un sistema de cuerpos materiales que gravitan unos sobre otros.

Consideremos, por ejemplo, un conductor cargado (A) ubicado en el campo de otros conductores; su potencial V depende de su carga q, de la de los otros conductores y de la configuración del sistema. La electrostática indica que su energía de posición es

$$U = \tfrac{1}{2}\, q\, V_m.$$

Si desplazamos este conductor, su energía varía en una cantidad igual al trabajo mecánico efectuado por las fuerzas de acción a distancia que los otros conductores ejercen sobre él. Sin embargo, este desplazamiento no altera el valor de las cargas del sistema, en cambio, afecta su potencial y se verifica que

$$d_T = dU = q\, dV_m$$

relación que es de la forma $\varepsilon\, dI$ en vez de $I\, d\varepsilon$ si se consideran los factores indicados para la energía electrostática.

Igual cosa sucede con la energía de gravitación, si, en lugar de considerar el escurrimiento de un líquido de un estanque a otro, se produce un desplazamiento vertical del estanque con su contenido.

Dada la absoluta semejanza que ofrecen las energías de posición, cualquiera que sea su origen, podemos estudiarlas en general. Sea

$$U = \varepsilon\, I \qquad *$$

la energía contenida en un sistema; si se desplaza uno de sus componentes en una cantidad *ds*, se tendrá

$$dU = \frac{dU}{ds}\, ds = \varepsilon\, \frac{dI}{ds}\, ds$$

puesto que se sabe que el desplazamiento es sin influencia sobre la extensidad.

* El factor $\frac{1}{2}$, indicado anteriormente, no interviene, por cuanto el desplazamiento de un solo cuerpo hace variar el potencial de todos los demás y la influencia de la variación de éstos es, en suma, igual a la del cambio de potencial del cuerpo desplazado.

Ahora bien, se sabe que en estas energías la intensidad coincide con el potencial y que la derivada de éste en una dirección dada representa la intensidad del campo en esta dirección; por lo tanto,

$$\frac{dI}{ds} = \frac{dV}{ds} = h$$

y $$dU = \varepsilon \, h \, ds = F \, ds$$

esto es, la expresión del trabajo de las fuerzas de acción a distancia.

Se llega así a la conclusión de que la energía de posición, cualquiera que sea su origen, admite como intensidad la fuerza y como extensidad el desplazamiento. Este cambio de los factores para una energía determinada, como la electrostática por ejemplo, según si se trata de un conductor aislado o de varios conductores, puede parecer arbitrario; sin embargo, fuera de las razones matemáticas que acabo de indicar, existen otras de orden físico que lo imponen.

En efecto, consideremos dos estanques comunicantes situados, en el campo de gravitación de la tierra, la condición de equilibrio es que la superficie del líquido en ambos estanques coincida con la misma superficie de nivel del potencial gravitacional; cumplida esta condición, el equilibrio es independiente de la cantidad de líquido contenida en cada estanque. Queda así verificado que el potencial es el factor determinante del equilibrio, esto es, la intensidad.

En cambio, si consideramos dos masas colgadas en sendos extremos de un hilo que pasa por una polea, la condición de equilibrio es que sus pesos sean iguales y no depende del nivel o potencial de cada uno de ellos; por consiguiente, en éste caso, la intensidad es el peso, o sea la fuerza de acción a distancia.

Por fin, si estas masas se cuelgan de sendos extremos de una palanca apoyada en un punto intermedio, la condición de equilibrio pasa a ser la igualdad de los momentos de los pesos respecto del punto de apoyo.

Esta diversidad de la energía de posición, que no tiene equivalente en las otras que figuran en el cuadro, se explica fácilmente. Todas las energías consideradas antes de ésta corresponden a sistemas en que hay una sola variable independiente (hemos prescindido sistemáticamente de las variaciones térmicas); en cambio, en los sistemas en que existen acciones a distancia, la energía depende de dos variables independientes: la extensidad propia y la configuración del sistema. Se tiene, entonces,

$$U = f(\varepsilon, \varepsilon')$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \, d\varepsilon + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'} \, \partial \varepsilon'$$

y se verifica fácilmente que, efectivamente,

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = I \qquad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'} = I'$$

son precisamente las dos intensidades diferentes, que hemos tenido que aceptar para estas energías.

Si el sistema se compone de *n* cuerpos, su configuración dependerá de *n* variables (vectoras) independientes (*) y el término $I' d\varepsilon'$ se compondrá de una suma de *n* términos. Si, ahora, la configuración del sistema está sometida a ligazones mecánicas, representables por ***n-1*** funciones (vectoras) de estas variables,

* Cada variable o ecuación vectora equivale a tres variables o ecuaciones Cartesianas respectivamente.

esta configuración queda bien definida por el valor de un solo parámetro.

Si se elige este parámetro, que tiene las características de una extensidad, como variable independiente, la derivada de la energía de posición respecto de esta variable será el factor determinante del equilibrio del sistema. Se podría designarlo con el nombre de *Intensidad generalizada* por analogía con las Fuerzas Generalizadas de Lagrange.

En los tres ejemplos relativos al campo de gravitación indicados más arriba, el sistema está sometido a ligazones diferentes en cada caso. En el primero la variable independiente es la masa que escurre de un estanque al otro: a la extensidad *masa* debe corresponder la intensidad *potencial*.

En el segundo, la variable independiente es el desplazamiento de las masas en la dirección del trozo del hilo que les corresponde. Se verifica que a la extensidad desplazamiento corresponde la intensidad fuerza.

Por fin, en el tercer caso, la configuración del sistema queda determinada por el desplazamiento angular de la palanca y, por lo tanto, la intensidad correspondiente es el momento relativo a este desplazamiento. Debe observarse la *conservación* de la variable independiente en cada uno de los tres casos, lo que confirma su carácter de extensidad; en efecto, su variación es, en cada caso, igual y de signo contrario para los dos cuerpos que constituyen el sistema.

En el caso más general, como todo desplazamiento elemental se reduce a una traslación y una rotación, las intensidades que intervienen en la energía de posición serán fuerzas y momentos, lo mismo que en la energía de deformación. Esta semejanza explica la posibilidad de interpretar las acciones a distancia por un estado de «tensión» o deformación elástica del medio que rodea el sistema.

No cabe estudiar lo que sucede con las intensidades de la energía de posición, cuando se juntan varios sistemas iguales por cuanto esta sumación no puede efectuarse sin variación de la energía total y de la extensidad (configuración) del sistema. En efecto, la energía del sistema resultante no es igual a la suma de la de los sistemas componentes sino a ésta aumentada en el trabajo necesario para juntarlos.

Resumen y conclusiones

De los ejemplos estudiados anteriormente se desprende que:

1.° Cada vez que varía la energía contenida en un sistema, esta variación va siempre acompañada de la de una o más variables que tienen las propiedades características de las extensidades.

2.° La derivada de la energía respecto de cada una de las extensidades que varían en una transformación, representa a la intensidad correspondiente. Por consiguiente, las dimensiones físicas de esta intensidad se obtendrán dividiendo las dimensiones de la energía, $L^2 M T^{-2}$, por las que corresponden a la extensidad considerada.

3.° El valor mismo de la energía puesta en juego durante la transformación elemental, es

$$dU = \Sigma \frac{\partial U}{\partial \Sigma} \dot{\Sigma} \qquad (3)$$

es decir, la suma de los productos de las intensidades por la variación elemental de la extensidad respectiva.

Voy a procurar obtener la expresión más general de la energía, compatible con las observaciones hechas en este estudio.

Por definición, la energía contenida en un sistema debe ser una función del producto de los factores de intensidad y de extensidad; como, además, esta función debe ser lineal y simétrica respecto de cada uno de ellos, su forma más general será

$$U = \Sigma k \, I \, \Sigma \qquad (4)$$

Ahora bien, una misma cantidad de una determinada energía puede presentarse con cualquier valor de Σ o de I; pero, para un sistema material dado, las cantidades Σ e I están ligadas por una relación, que depende de la naturaleza de la energía considerada, y de las características del sistema material que la contiene. Se tendrá, entonces,

$$I = f(\varepsilon) \qquad (5)$$

y voy a determinar qué condición debe llenar (f) para que (3) quede satisfecha.

La diferenciación de (4) da

$$\begin{aligned} dU &= \Sigma k \left[f(\varepsilon) + \Sigma f'(\varepsilon) \right] d\varepsilon \\ &= \Sigma k \left[1 + \varepsilon \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} \right] f(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \qquad (6)$$

cuya comparación con (3) conduce a

$$\frac{\varepsilon}{I} \frac{dI}{d\varepsilon} = \frac{1 - k}{k} = n \qquad (7)$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\text{Lg. } I = n \text{ Lg. } \varepsilon + \text{Lg. } C$$

o sea

$$I = C \cdot \varepsilon^n \qquad (8)$$

y

$$k = \frac{1}{n + 1} \qquad (9)$$

Ahora, es preciso conciliar la relación (8) con la condición fundamental de que I permanezca invariable, a pesar del aumento de ε, cuando este aumento se produce por la reunión de varios sistemas idénticos. Para que esto se verifique con cualquier valor de n, es preciso que

$$C = a^{-n} \qquad (10)$$

en que a es un coeficiente dependiente de las características del sistema que contiene la energía y que crece proporcionalmente, cuando a un sistema se substituyen varios sistemas iguales. Se obtiene, con esta modificación,

$$I = \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^n \qquad (8')$$

y la expresión general de la energía contenida en un sistema, es

$$U = \Sigma \frac{1}{n + 1} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^n \cdot \varepsilon \qquad (11)$$

El exponente n tiene el valor 0 para la energía de posición originada por el campo gravífico de la tierra, y en todos los casos en que la intensidad no depende de la extensidad. Su valor es de $n = 1$ para la mayoría de las formas de energía, como ser: eloctrostática, cinética, elástica de deformación, etc., lo que explica la presencia del factor $\frac{1}{2}$ en la expresión de esas energías.

En el caso de la energía de volumen, me limitaré al caso de un gas perfecto, que experimenta una transformación adiabática, para evitar la complicación de los intercambios térmicos que no han sido considerados en el presente estudio. La ley de la comprensión adiabática da

$$p = p_o \left(\frac{v}{v_o} \right)^{-\gamma}$$

expresión que satisface la forma general (8'). Se desprende de esta relación que en la expresión de la energía correspondiente debe aparecer en el denominador el factor $1-\gamma$; efectivamente, el trabajo acumulado en un kg. de gas, es

$$\tau = \frac{R}{1-\gamma} T$$

En cuanto al factor *a*, representa la capacidad en la energía electrostática, la masa en la energía cinética, a

$$v_o \sqrt[\gamma]{p_o}$$

para la energía de un gas perfecto térmicamente aislado, y a

$$\frac{1}{E S}$$

para un sólido de sección constante sometido a un esfuerzo de tracción. Se comprueba inmediatamente que todas estas cantidades crecen proporcionalmente a la extensidad, cuando se ponen en contacto varios sistemas idénticos.

Valdivia, Febrero de 1931.