ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Sucesor

De la "SOCIEDAD DE INGENIERIA" Fundada el 31 de Mayo de 1888

Y del "INSTITUTO DE INGENIEROS" Fundado el 28 de Octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de Diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXI — MAYO - JUNIO DE 1948 — N.os 5-6

Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pdte.), Carlos Ponce de León, Arturo Quintana y Carlos Concha.

Ing. Adolfo Drien B.

Diagramas para el cálculo de los momentos solicitantes en losas continuas

La determinación de los momentos solicitantes en las losas continuas de hormigón armado, en las cuales se prevé el empleo de armaduras cruzadas, es un trabajo tedioso que ha tratado de aligerarse con el auxilio de tablas especiales. Este estudio, que pretendemos original en las partes que se indicarán oportunamente, tiene dicha finalidad.

En lo que se refiere a los momentos negativos en las sustentaciones, cualquiera que sea el método de cálculo que se siga, puede decirse que no se encontrarán discrepancias apreciables en los resultados a que pueda llegarse. Pero no sucede lo mismo con los momentos de vano en cuya determinación, según sea el método que se haya empleado, se obtienen valores que, a veces, difieren de una manera considerable.

El Pliego Chileno de normas para el cálculo de los momentos de vano autoriza el empleo del método aproximado de Marcus, esto es, el método de las fajas cruzadas considerando la reducción que experimentan dichos momentos por la resistencia a la torsión de las fajas adyacentes.

Puede decirse que, en realidad, cada uno emplea el método que mejor cuadra a su idiosincrasia; pero es evidente que entre nosotros hay una marcada preferencia por el uso del método de Marcus que permite llegar a soluciones económicas y cuyo empleo se facilita con la ayuda de tablas. Entre éstas, son particularmente apreciadas las debidas a Löser (Hormigón Armado. Traducción I. Rumbo, Editorial Ateneo, Buenos Aires). Como es sabido, el autor citado tabuló los coeficientes **m** de reducción aplicables a las expresiones a que llegó para los momentos máximos y mínimos de vano y que son:

$$M_a = \left[\frac{p + 0{,}5\ s}{m_{na}} \pm \frac{0{,}5\ s}{m_{la}}\right] \cdot a^2 \qquad M_b = \left[\frac{p + 0{,}5\,s}{m_{nb}} \pm \frac{0{,}5\ s}{m_{lb}}\right] \cdot b^2$$

La notación es la siguiente:

M_a, M_b, momentos máximo o mínimo de vano, en la dirección de la luz a ó b respectivamente.

p, carga permanente (peso propio, pavimento, etc.)

s, sobrecarga móvil.

m_{na}, m_{nb}, coeficiente de reducción que depende del tipo de continuidad **n** en sentido determinado, a ó b, y de la razón $r = \frac{b}{a}$ entre las luces.

m_{la}, m_{lb} coeficientes de reducción correspondientes a la losa discontinua.

Estas tablas ahorran algunas operaciones (la determinación de los coeficientes de reducción) pero, a pesar de todo, su empleo no deja de ser engorroso, lo que se comprende fácilmente observando la expresión de los momentos.

Siguiendo el mismo camino, esto es, haciendo intervenir en el coeficiente de reducción el tipo de sustentación de los bordes de la losa y el efecto de continuidad, cargando alternativamente con la sobrecarga móvil las losas del piso, se puede llegar a las siguientes expresiones de los momentos máximo y mínimo de vano:

1) $$M_a = [A_{na}\ (p + 0{,}5s) \pm B_a \cdot 0{,}5s]\ a^2$$

2) $$M_b = [A_{nb}\ (p + 0{,}5s) \pm B_b \cdot 0{,}5s]\ b^2$$

En estas ecuaciones, A es el coeficiente de reducción que depende de $r = \frac{b}{a}$ y del tipo de continuidad; en el subíndice, **n** indica el tipo de continuidad y a o b, el sentido que se considera. En cuanto al coeficiente B, es el de reducción correspondiente a la losa discontinua. Se ve, de inmediato, que son las mismas ecuaciones a que llegó Löser y en ellas no hay nada de original, salvo la forma, que permite llegar a una aplicación muy cómoda. El signo + dentro del paréntesis corresponde a los momentos positivos máximos y el signo — a los mínimos que pueden llegar a ser negativos como veremos más adelante.

a) **Momentos máximos positivos.**—Su expresión general con la notación conocida es:

3) $$M = [\,A\ (p + 0{,}5s) + 0{,}5\ B\ s\,] \cdot L^2$$

En esta ecuación L es la luz en cualquiera de los dos sentidos. Ahora designemos por N la razón entre la carga permanente y la sobrecarga esto es, $N = \frac{p}{s}$ e introduzcamos $p = N.s$ en la ecuación 3). Se tiene:

4) $$M = \frac{(2\ N + 1) \cdot A + B}{2} \cdot s \cdot L^2 = C \cdot s \cdot L^2$$

Consideremos ahora la expresión del coeficiente C. En ella desarrollemos el paréntesis, simplifiquemos y se tendrá:

$$5) \qquad C = \frac{A + B}{2} + N \cdot A$$

Si tenemos presente que para cada tipo de sustentación y para cada valor r se obtienen valores fijos y determinados de A y B, la ecuación nos hace ver que el valor de C varía únicamente con N que figura en el producto N. A. Es, entonces, la ecuación de una línea recta y, por lo tanto, el diagrama de alineaciones aparece como el más simple para la determinación de los valores C. A fin de hacer estos diagramas de utilización universal y ampliables, en cualquier momento, a valores no contemplados, he usado escalas decimales y no escalas logarítmicas. Abarcan los tipos de sustentación, o de continuidad que es lo mismo, que se indican en la figura. Se ve, pues, que comprenden todos los tipos de continuidad posible que designaremos de aquí en adelante con los números indicados en los vanos. En cuanto a los sentidos a y b, aun cuando algunos de ellos son intercambiables, estimo preferible atenerse a los que indico, con lo que el trabajo se sistematiza y se evitan errores.

El empleo de estos diagramas es muy sencillo y creo que su aplicación a la resolución de un ejemplo evitará explicaciones. Sea calcular los momentos máximos positivos de vano en una losa del tipo 4 de continuidad, con las dimensiones siguientes a = 4 m, b = 4,8 m y solicitada por una carga total uniformemente repartida q = 800 Kg/m^2 que corresponde a p = 550 Kg/m^2 y s = 250 Kg/m^2,

$$\text{Tenemos:} \quad r = \frac{b}{a} = \frac{4,8}{4} = 1,2 \qquad\qquad N = \frac{550}{250} = 2,2$$

Unamos ahora con una recta el punto 2,2 de la escala N (a) con el punto 1,2 de la escala r_{4a} y prolonguémosla hasta su intersección con la escala C_4 donde leeremos C_a = 0,152. El momento máximo de vano en el sentido de a vale

$$M_a = + 0,152 \times 250 \times 4^2 = 608 \text{ Kg. m.}$$

Del mismo modo, uniendo 2,2 de la escala N (b) con 1,2 de la escala r_{4b} y prolongando hasta C_4 leemos C_b = 0,073. El momento máximo de vano en el sentido de b vale

$$M_b = + 0,073 \times 250 \times 4,8^2 = + 420 \text{ Kg. m.}$$

En cuanto a la construcción de estos diagrama, es necesario hacer presente que ha sido y puede ser hecha de una manera arbitraria sin otra condición que el paralelismo de las escalas N y C, condición fundamental para los diagramas de alineación cuando los puntos fijos, en este caso los puntos que corresponden a los diversos valores de **r**, no están situados sobre una línea recta. En cuanto a las ubicaciones de los ceros, han sido elegidos como me ha parecido más conveniente de acuerdo con mi propia idiosincrasia y mi capacidad personal para apreciar los puntos de intersección al hacer las lecturas.

El lugar geométrico de los valores $\frac{b}{a}$ tiene su punto de origen en el cero de la escala C correspondiente y sus puntos se obtienen por intersección utilizando los valores calculados para $\frac{A + B}{2}$ que corresponde a C para $N = 0$ y $\frac{A + B}{2} + N A$ que corresponde a un valor de N arbitrariamente elegido. Personalmente utilicé el valor $N = 5$ para el trazado de los diagramas, porque me permitió una simplificación muy singular, no ideada por mí, al efectuar la tabulación previa de los valores empleando una máquina de calcular. A fin de que cualquiera pueda construir los diagramas de acuerdo con sus gustos personales, se incluye la tabla que contiene los valores calculados para A y B para los cinco tipos de continuidad. Por otra parte, esta tabla tiene otra utilización a que nos referiremos más adelante.

Con el objeto de formarse juicio del grado de aproximación que se obtiene en el cálculo de los momentos de vano y de la rapidez en las operaciones, vamos a resolver un ejemplo que figura en la página 253 de la obra ya citada «Hormigón Armado» de Löser. Los datos son los siguientes: continuidad tipo 3, $a = 7{,}50$ m, $b = 6.00$ m; carga permanente $p = 420$ Kg/m^2, sobrecarga $s = 500$ Kg/m^2. Tenemos entonces: $\frac{b}{a} = 0{,}80$; $N = \frac{420}{500} = 0.84$. El diagrama C_3 nos permite obtener $C_a = 0{,}033$ y $C_b = 0{,}805$ de donde:

$$M_a = +\ 0{,}033 \times 500 \times 7{,}5^2 = +\ 928 \text{ Kgm.}$$

$$M_b = +\ 0{,}0805 \times 500 \times 6^2 = +\ 1449 \text{ Kgm.}$$

Copio a continuación de la obra citada:

$$p + \frac{s}{2} = 420 + 250 = 670 \qquad y\ \frac{s}{2} = 250$$

$$M_a = 7{,}5^2 \left(\frac{670}{62{,}18} + \frac{250}{43{,}97}\right) = +\ 925 \text{ Kgm.}$$

$$M_b = 6^2 \left(\frac{670}{25{,}47} + \frac{250}{18{,}01}\right) = +\ 1446 \text{ Kgm.}$$

Se han obtenido los mismos resultados y se ve que el empleo de las tablas exige mayor número de operaciones que el de los diagramas que propongo.

b) **Momentos mínimos de vano. Momentos negativos de vano.**—De igual manera como para los momentos máximos positivos podemos obtener como expresión general de los momentos mínimos:

$$6) \qquad M = \frac{(2\ N + 1)\ A - B}{2} \cdot s \cdot L^2$$

Habitualmente no interesan los momentos mínimos de vano, pero es indispensable determinarlos cuando adquieren signo negativo. Para que M sea negativo es necesario que $B > (2\ N + 1)\ A$, condición ésta que suele realizarse para valores muy bajos de N (sobrecargas muy elevadas con respecto a las cargas permanentes) y para valores muy altos (próximos a 2) o muy bajos (cercanos a 0,5) de la razón r; esto último, por ejemplo, es el caso de una losa con luz relativamente pequeña en un sentido y que es adyacente a otra de gran luz o se encuentra comprendida entre dos de gran luz. Determinado el valor de N, con el auxilio de la tabla de los valores A y B se puede constatar rápida y fácilmente la existencia de momentos negativos de vano y calcular sus valores por medio de la ecuación 6).

c) **Momentos en las sustentaciones-Reacciones de apoyo.**—Cuando se calculan los momentos de vano por el método de Marcus, se obtienen soluciones económicas, esto es, pequeños espesores para la losa y reducida armadura. Es seguro entonces, o por lo menos muy frecuente, que el área de armadura que se obtiene en las sustentaciones en que hay continuidad por la sola penetración de las armaduras de una losa en la adyacente, no sea suficiente para absorber los esfuerzos de tracción producidos por los momentos negativos en las sustentaciones. Por lo tanto, es indispensable determinar dichos momentos y para su determinación se admite:

1.°) El cálculo con coeficiente C como en las vigas continuas totalmente cargadas y que son $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{12}$ según el número y ubicación de las sustentaciones;

2.°) Como luz de cálculo, la semisuma de las luces de las losas adyacentes en el sentido correspondiente;

3.°) Como carga, la semisuma de las cargas en el sentido correspondiente de las losas adyacentes;

4.°) Calcular las dimensiones y la armadura con el momento en el borde o canto de la viga o muro soportante.

Así, la expresión general de los momentos de borde será:

$$M_1 = -C\,\frac{q_1 + q_2}{2}\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)^2 + \frac{q_1\,L_1\,b}{4}$$

ecuación en la que:

M_1 es el momento de borde de la losa N.° 1 en el sentido de la luz L_1 en la sustentación que hay entre las losas N.^os 1 y 2.

C el coeficiente de momento correspondiente.

q_1 la carga por m^2 que soporta la losa N.° 1 en el sentido de la luz L_1.

q_2 lo mismo anterior para la losa N.° 2 en el sentido de la luz L_2 que es el mismo, como es lógico, que el de la luz L_1.

b el ancho de la sustentación.

El término con signo negativo de la ecuación es el momento en el eje de la sustentación y el término con signo positivo es el momento de la reacción en el eje con respecto al borde. Análogamente para la losa N.° 2 tenemos un momento de borde en cuya expresión sólo cambia el 2.° término del 2.° miembro y que es:

$$M_2 = -C \cdot \frac{q_1 + q_2}{2}\left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)^2 + \frac{q_2\,L_2\,b}{4}$$

En las expresiones anotadas para los momentos de borde sólo desconocemos, hasta ahora, los valores q, esto es, los valores de la parte de la carga total que corresponden a cada sentido de las luces. Dichos valores dependen del tipo de continuidad y de la razón r. Sus expresiones son:

$$q_a = \alpha_a (p + 0{,}5\ s) + \beta_a \cdot 0{,}5\ s \qquad q_b = q - q_a$$

ecuaciones en las que:

q_a = carga que corresponde a la losa en el sentido de la luz a

q_b = id. en el sentido de la luz b

q = carga total igual a $p + s$

α_a = coeficeinte que depende del tipo de continuidad y de $r = \frac{b}{a}$

β_a = coeficiente correspondiente a la losa discontinua y que depende de $r = \frac{b}{a}$

p = carga permanente

s = sobrecarga móvil.

Para facilitar el cálculo de los valores q_a y q_b se ha confeccionado la tabla que se incluye y que también sirve para calcular las reacciones en los apoyos cuya expresión es:

$$R_1 = \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \frac{L_1 + L_2}{2}\ \mathrm{Kg/m} \cdot 1$$

Se acepta que R es una carga uniformemente repartida.

Para terminar debo decir que estimo originales la expresión del coeficiente C de los momentos de vano y los diagramas para calcularlo. Aun cuando han sido calculados especialmente y no los he visto publicados, no estimo originales los valores contenidos en la tabla 1 en atención a que hay otras tablas con otros valores que permiten llegar a los mismos resultados. Los valores contenidos en la tabla 2 aparecen en la obra de Löser y su cálculo se hizo únicamente en el carácter de verificación. Con respecto al cálculo de las tablas debo dejar constancia de mis agradecimientos al Ingeniero don Raúl Donoso E., que me prestó colaboración con verdadero empeño y excepcional habilidad en la tabulación de los coeficientes.

A. D. B.

ADOLFO DRIEN B.
ING. CIV.

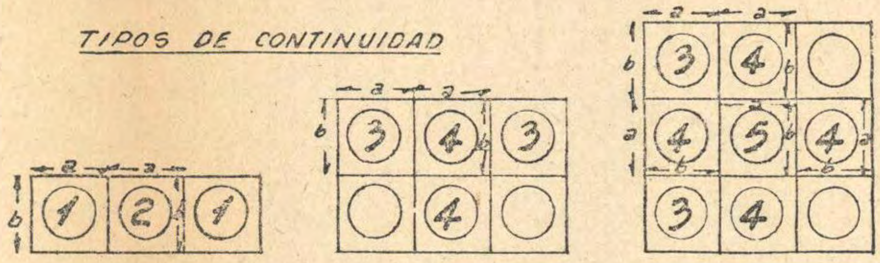
LOSAS CONTINUAS CON ARMADURAS CRUZADAS.-

Cálculo de los momento. solicitantes.—

NOTACION:

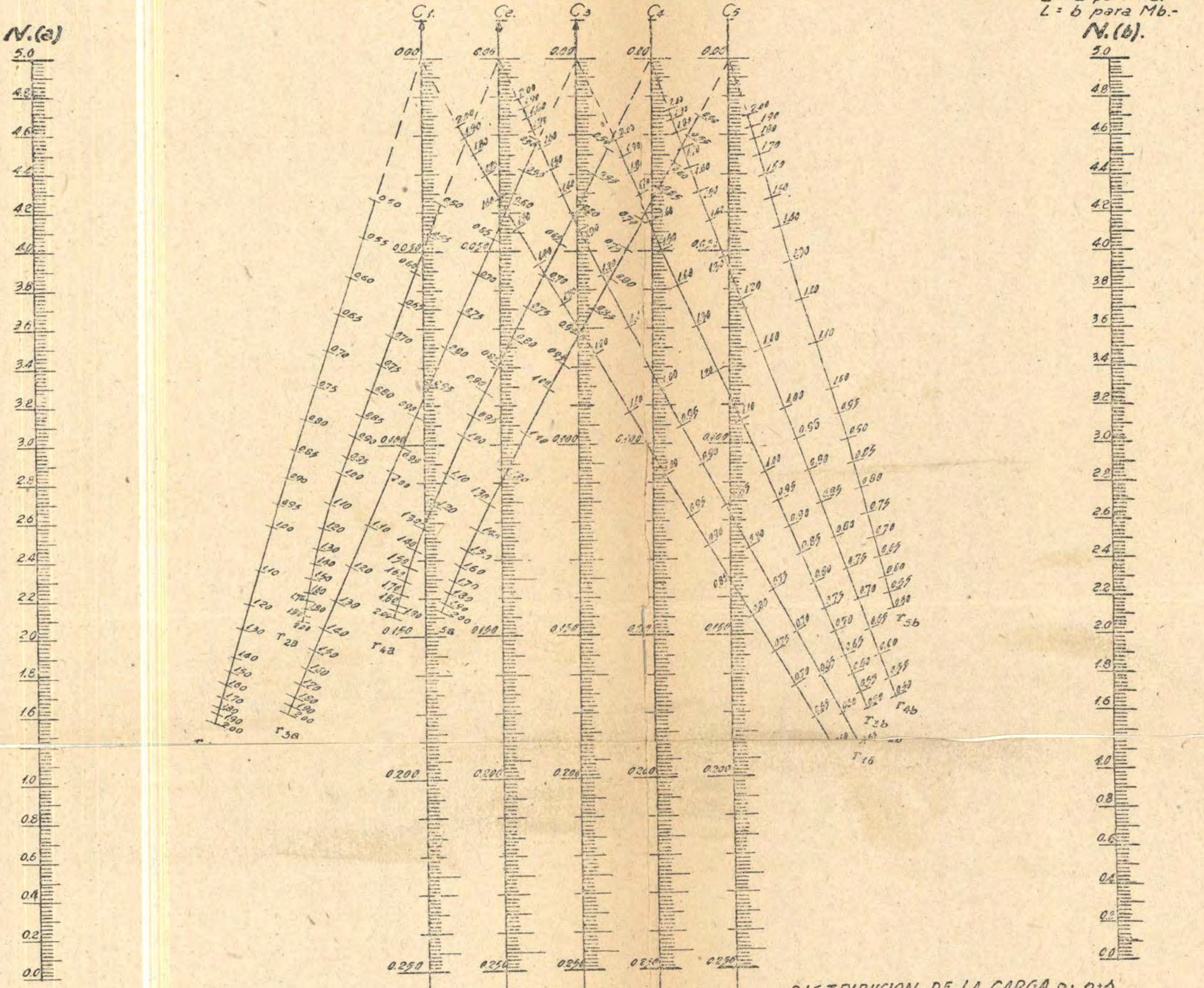
p = cargas permanentes (peso propio etc.).-
s = sobrecarga -
$N = \frac{p}{s}$
a = luz en el sentido de a -
b = luz en el sentido de b -
n = 1, 2, 3, 4, 5, tipo de sustentación.
C_n = coeficiente de momento positivo de vano.
C_{na} = ″ ″ en el sentido de a.-
$\gamma_{na} = \frac{b}{a}$ en sentido a, continuidad tipo n.

TIPOS DE CONTINUIDAD



COEFICIENTES C_n DE LOS MOMENTOS POSITIVOS MAX. DE VANO - $+M = C_n \times s \times L^2$ -

$L = a$ para M_a.-
$L = b$ para M_b.-



MOMENTOS MINIMOS DE VANO: $M = \frac{(2N+1) \times A - B}{2} \times s \times L^2$

b/a	DISCONTINUA Ba	DISCONTINUA Bb	C1 Aa	C1 Ab	Ce Aa	Ce Ab	C3 Aa	C3 Ab	C4 Aa	C4 Ab	C5 Aa	C5 Ab
0.50	0.006	0.095	0.007	0.089	0.007	0.080	0.004	0.059	0.004	0.056	0.002	0.037
0.55	0.008	0.088	0.009	0.091	0.210	0.071	0.005	0.056	0.005	0.052	0.003	0.035
0.60	0.011	0.081	0.011	0.073	0.011	0.062	0.007	0.052	0.007	0.048	0.004	0.034
0.65	0.013	0.074	0.014	0.065	0.014	0.054	0.009	0.050	0.009	0.044	0.005	0.032
0.70	0.016	0.068	0.017	0.058	0.016	0.046	0.011	0.046	0.011	0.040	0.007	0.030
0.75	0.019	0.061	0.019	0.051	0.018	0.040	0.014	0.043	0.013	0.036	0.008	0.028
0.80	0.023	0.055	0.022	0.045	0.020	0.034	0.016	0.039	0.015	0.032	0.010	0.026
0.85	0.026	0.050	0.025	0.040	0.022	0.029	0.019	0.035	0.017	0.028	0.012	0.024
0.90	0.029	0.045	0.029	0.035	0.024	0.025	0.021	0.032	0.019	0.025	0.014	0.022
0.95	0.033	0.040	0.031	0.031	0.025	0.021	0.024	0.029	0.020	0.022	0.016	0.020
1.00	0.036	0.036	0.033	0.027	0.027	0.018	0.027	0.027	0.022	0.019	0.018	0.018
1.10	0.044	0.030	0.038	0.021	0.029	0.013	0.032	0.022	0.025	0.015	0.021	0.015
1.20	0.051	0.025	0.042	0.016	0.031	0.010	0.037	0.018	0.028	0.011	0.024	0.011
1.30	0.059	0.021	0.047	0.013	0.033	0.007	0.041	0.014	0.030	0.009	0.027	0.009
1.40	0.066	0.017	0.049	0.010	0.034	0.005	0.045	0.012	0.032	0.007	0.029	0.008
1.50	0.072	0.014	0.053	0.010	0.035	0.004	0.049	0.010	0.033	0.005	0.031	0.006
1.60	0.078	0.011	0.055	0.006	0.036	0.003	0.051	0.008	0.035	0.004	0.032	0.005
1.70	0.083	0.010	0.057	0.005	0.037	0.002	0.052	0.006	0.036	0.003	0.034	0.004
1.80	0.087	0.008	0.059	0.004	0.037	0.002	0.056	0.005	0.036	0.003	0.035	0.003
1.90	0.091	0.007	0.060	0.003	0.038	0.002	0.057	0.004	0.037	0.002	0.036	0.002
2.00	0.095	0.006	0.061	0.003	0.038	0.001	0.059	0.004	0.038	0.002	0.037	0.002

DISTRIBUCION DE LA CARGA $q = p + s$

$q_a = \alpha_a (p + \frac{s}{2}) + \beta_a \times \frac{s}{2}$ $q_b = q - q_a$

b/a	DISC. β_a	C1 α_a	Ce α_a	C3 α_a	C4 α_a	C5 α_a
0.50	0.059	0.135	0.238	0.056	0.111	0.059
0.55	0.088	0.186	0.318	0.084	0.155	0.084
0.60	0.115	0.244	0.393	0.115	0.206	0.115
0.65	0.153	0.308	0.422	0.152	0.263	0.151
0.70	0.194	0.375	0.546	0.194	0.324	0.154
0.75	0.240	0.441	0.613	0.240	0.388	0.240
0.80	0.290	0.506	0.671	0.291	0.450	0.291
0.85	0.343	0.566	0.728	0.343	0.514	0.343
0.90	0.395	0.621	0.766	0.396	0.568	0.396
0.95	0.449	0.670	0.808	0.449	0.628	0.449
1.00	0.500	0.718	0.833	0.500	0.667	0.500
1.10	0.594	0.785	0.880	0.594	0.745	0.594
1.20	0.674	0.838	0.912	0.675	0.806	0.675
1.30	0.740	0.877	0.935	0.740	0.851	0.740
1.40	0.793	0.905	0.950	0.793	0.885	0.794
1.50	0.835	0.927	0.962	0.835	0.910	0.835
1.60	0.868	0.942	0.970	0.868	0.930	0.858
1.70	0.893	0.954	0.977	0.893	0.944	0.893
1.80	0.913	0.963	0.981	0.913	0.955	0.913
1.90	0.929	0.970	0.985	0.929	0.963	0.928
2.00	0.941	0.975	0.988	0.941	0.970	0.941